فن حل المسألة الرياضية

تأليف

RICHARD M. BEEKMAN

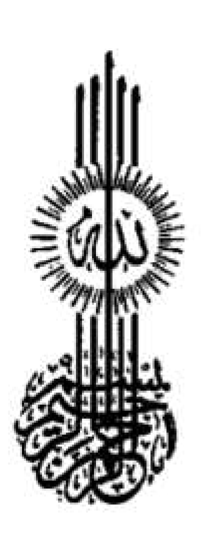
ترجمة

د خالد حلمي خشان

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k a^{n-k}$$






mohamed khatab

فن حل المسألة الرياضية

تأليف

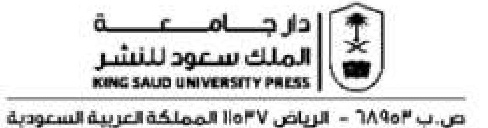
RICHARD M. BEEKMAN

ترجمة

د. خالد حلمي خشان

أستاذ مشارك من قسم العلوم الأساسية – عمادة السنة الأولى المشتركة

جامعة الملك سعود



ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ المملكة العربية السعودية

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

بيكيمان، ريتشارد م.

فن حل المسألة الرياضية./ رتشارد م. بيكيمان؛ خالد حلمي خشان.- الرياض، ١٤٤٠هـ

٢٣٨ ص؛ ١٧ × ٢٤ سم

ردمك: ٢ - ٧٦٨- ٥٠٧ - ٦٠٣ - ٩٧٨

١- الحساب ٢- الرياضيات أ. خشان، خالد حلمي (مترجم)

ب. العنوان

ديوي ٥١٣,٢١ ١٤٤٠/١٠١٣٣

رقم الإيداع: ١٤٤٠/١٠١٣٣

ردمك: ٢ - ٧٦٨- ٥٠٧ - ٦٠٣ - ٩٧٨

هذه ترجمة عربية محكمة صادرة عن مركز الترجمة بالجامعة لكتاب:

THE ART OF MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING
By: RICHARD M. BEEKMAN
© 2015 BY RICHARD M. BEEKMAN

وقد وافق المجلس العلمي على نشرها في اجتماعه السابع عشر للعام الدراسي ١٤٣٩/ ١٤٤٠هـ المنعقد بتاريخ ٣/٨/ ١٤٤٠هـ الموافق ٨/ ٤/ ٢٠١٩م.



مقدمة المترجم

يهدف هذا الكتاب إلى التأكيد على الفن بدلاً من العلم في حل المسألة الرياضية، فالرياضيات هي فن جميل يشبه الرسم والنحت والموسيقى. وحيث إن الفن يتضمن الشغف، والمشاعر، وربما القليل من الجنون فإن الناس الذين لا يفهمون الجزء الجمالي من الرياضيات يعتقدون أن الموضوع يتعلق بتطبيق منطق جاف لحل التمارين الكمية العقيمة. التحدي الذي يواجهنا عند محاولة حل أي مسألة رياضية هو الانتقال من حالة مبدئية نشعر خلالها بالخوف والذعر والإحساس بالضياع وفقدان الأمل إلى حالة أخرى مختلفة تماماً عندما نجد حلاً جيلاً ومدهشاً للمسألة التي أمامنا. وهذا هو الفن في حل المسألة الرياضية.

تم تنظيم فصول الكتاب بحيث تتمحور حول المنهجية العامة لحل المسألة الرياضية، وباستثناء الفصل الأول فإن كل فصل من فصول الكتاب ناقش أحد خطوات المنهجية العامة لحل المسألة الرياضية. ويشير الكتاب إلى وجود العديد من الخطوات المختلفة – التي قد تبدو أحياناً متشابهة – لحل المسائل. لذلك فإن الخطوات التي سار عليها الكتاب في حل المسألة ليست هي الخطوات الوحيدة كما أنها ليست الخطوات الأصلية بالكامل، إنها ببساطة الخطوات التي كانت مفيدة في حل العديد من المسائل.

يتحدى الكتاب العبارة التي تقول إن الرياضيات هي مجال يقتصر على العباقرة الفطريين، فالحقيقة أن كل ما هنالك أن البشر عادةً لا يمتلكون الكفاءة المطلوبة في الرياضيات، حيث إن العقول البشرية ليست مصممة لممارسة الرياضيات، ويشير الكتاب أن العبقرية الرياضية هي نتاج للعمل الشاق والمضني أكثر من كونها ميولاً فطرية تولد مع الإنسان. ويرى المؤلف أنه يمكننا أن نصل لما يبدو أنه حلول معقدة للمسائل الرياضية من خلال الاستكشاف المكثف، فالصورة التي تظهر العبقري وقد تناول فنجاناً من القهوة مساء يوم الأحد وتوصل بهدوء إلى الفكرة العبقرية الصحيحة لحل المسألة هي على الأغلب مجرد وهم. فنحن وبشكل عام عندما نطلع على مسألة رياضية محلولة لا نرى الجهود المضنية والمحاولات الفاشلة التي تم القيام بها للوصول إلى حل هذه المسألة.

ويؤكد الكتاب على أن الخطوة الأكثر أهمية من ضمن خطوات عملية حل المسألة الرياضية هي الخطوة المتعلقة بفهم المسألة التي نحاول حلها. هذه الخطوة أكثر أهمية من باقي خطوات عملية حل المسألة الرياضية الأخرى؛ لأنها تمثل المكان الذي عادةً ما يتعثر ويفشل فيه الكثير من الناس، إنها طبيعة بشرية حيث إننا نريد أن نسرع ونجتاز هذه الخطوة للوصول إلى الأشياء الأكثر متعة مثل استكشاف المسألة وحلها. ولكن إذا لم تفهم المسألة بشكل واضح، وتفهم أهدافها وقيودها، فإما أنك ستفشل في حلها، أو أنك ستحل المسألة الخطأ. ويسلط الكتاب الضوء على عملية استكشاف المسألة، حيث يرى أننا قد لا نكون قادرين على حل جميع المسائل التي تواجهنا، لكننا سنكون قادرين على فهم الطريقة، كما سنكون قادرين على فهم كيف يتعامل الرياضيون مع المسائل الجديدة في الرياضيات. كما أن التفكير بشكل نقدي وإبداعي هي مهارات مهمة يمكن أن نتعلمها من خلال التعامل مع المسائل الرياضية. وبدلاً من تقديم مجموعة من النظريات متبوعة بعدد من التمارين، قام الكتاب بتجنب الذهنية المتمركزة حول الأداة، حيث يرى أن النظريات وعلى الرغم من أهميتها تشبه الأدوات التي يجب استخدامها بروية وتأنٍ، فالأدوات وحدها غير قادرة على منحنا نجاراً متميزاً وخبيراً، بل على العكس فالنجار الخبير هو القادر على التوظيف الناجح والاستخدام الجيد للأدوات، ولهذا السبب تم استخدام النظريات بشكل قليل في الكتاب كلما دعت الحاجة لذلك، وضمن سياق حل المسائل الرياضية.

قدم الكتاب مجموعة من المسلمات للتعامل مع حل المسائل الرياضية، وقد جاءت على شكل نصائح للساعين إلى النجاح في حل المسائل الرياضية، كما استخدم الكتاب مجموعة من التكتيكات الرياضية التي تساعدنا بشكل كبير في التعامل مع المسائل الرياضية، وتسهل علينا حل المسائل الرياضية الصعبة.

وأخيراً فإنني أنصح جميع المهتمين بالرياضيات وطرائق تدريسها بالاطلاع على هذا الكتاب، وذلك لتناوله موضوعاً مهمًّا جداً وهو حل المسألة الرياضية، ومحاولة تقديمها بطريقة سلسة ومنظمة فيها الكثير من الفن والإبداع، بالإضافة إلى تقديم العديد من الإستراتيجيات الفاعلة في التعامل مع المسائل الرياضية التي تعطينا الوسائل اللازمة لمواجهة هذه المسائل ومساعدتنا على حلها.

ولهذا الكتاب أهمية كبيرة للمهتمين بأولمبياد الرياضيات، حيث إنه يقدم العديد من الاقتراحات التي تطور وتحسن من قدرة الطلاب في التعامل مع مسائل الأولمبياد. ويمكن الاستفادة منه في تطوير برامج تدريبية يتم تقديمها للطلاب المشاركين في أولمبياد الرياضيات.

المترجم

شكر وتقدير

أدين بالشكر العميق للرياضيين القدامى مثل: أرخميدس (Archimedes) (الميكانيكا)، وإقليدس (Euclid) (الهندسة)، وأبولونيوس (Apollonius) (القطوع المخروطية) الذين كانوا رواد التفكير المنضبط في الرياضيات. وعلى وجه الخصوص أرخميدس الذي علمني التفكير بعمق حتى في الأفكار البسيطة، كما أقدم امتناني وشكري العميق للرياضيين الروس المعاصرين العظماء مثل: آندريه كولمجوروف الذي تميز بكتاباته التفسيرية الرائعة حقًّا، حيث إنني وبدون الاستعانة بكتب الرياضيات الرائعة للعلماء الروس كنت سأعاني من الفقر الفكري.

كما أدين بالشكر الأكبر أو على الأقل بالدرجة نفسها لمنظمة بريليانت وهي منظمة مرموقة، وقد وفر لي موقعهم الإلكتروني (www.brilliant.org) العديد من التحديات والدوافع الرياضية المدهشة، كما أن العديد من المسائل في هذا الكتاب تم الحصول عليها من هذا الموقع، ومع ذلك فأنا قمت بحل جميع المسائل بطريقتي الخاصة، وذلك في محاولة لشرح أسلوبي الخاص في التفكير، وهدفي هنا هو تدريس الرياضيات باعتباره نوعاً من أنواع الفنون.

صديقي وزميلي العزيز كريستيان هازيلبيرغ (Christian Hassrlberg) يستحق مني شكراً خاصًّا، حيث إنه مفكّر مبدع وأصيل وخصوصاً في مجالي الأعمال والإدارة، لطالما كان له شخصية هزلية مرحة ومزاج مبتكر وفر لي المزيد من الإلهام لدراسة الرياضيات، وبخلاف الكثير من الناس لم يسألني كريستيان أبدًا السؤال: لماذا تضيع الكثير من الوقت في دراسة الرياضيات؟ وبدلاً من ذلك كان دائماً يقول لي: ما هي الأشياء الأخرى التي ستقوم بها فيما تبقى من وقتك؟

المسائل الواردة في هذا الكتاب مستقاة من العديد من المصادر، بعضها مسائل رياضية كلاسيكية من التراث الرياضي، وبعضها الآخر تم الحصول عليها من خلال العديد من المسابقات والمجلات، أو مما تم نشره على الموقع الإلكتروني(www.brilliant.org) .المصادر المتعددة لجميع المسائل الواردة في الكتاب- إذا كانت معروفة- تم سردها في نهاية الكتاب بعد الملاحق في قسم خاص تحت مسمى "مصادر المسائل".

أهدي هذا الكتاب للعبقري الصغير سيباستيان

قد يكون لديَّ الكثير من الأشياء لأتعلمها منه أكثر مما يمكنه أن يتعلم مني

مقدمة المؤلف

يوجد موقع متميز للأشخاص الذين يستمتعون بحل المسائل الرياضية والفيزيائية المثيرة للتحدي، هذا الموقع هو (www.brilliant.org). المسائل المنشورة في هذا الموقع ليست تمارين روتينية، ولكنها مسائل رياضية وفيزيائية حقيقية، وعادةً ما تكون مستقاة من الأبحاث أو من المسائل الواردة في الأولمبياد، ويتطلب حلها براعة كبيرة وعملاً شاقاً.

لقد بدأت علاقتي الغرامية مع الرياضيات في سن السادسة. أتذكر حين بدأت النظر إلى كتب الرياضيات المتقدمة برموزها الغريبة وحقائقها التي لا تصدق، وتساءلت حينها: كيف يمكن للناس أن يفهموا مثل هذه الأشياء؟ ومنذ ذلك الوقت قمت بدراسة الرياضيات لمدة (30000) ساعة عمل على مدى نصف قرن، لقد قمت بدراسة المئات من كتب الرياضيات (بدأت بالتوقف عن العد عند الكتاب رقم 231)، وقمت باختراع أو اكتشاف العشرات من النظريات الجديدة في مجال نظرية التركيبات العددية، وهي مجالي البحثي الرئيسي. وعلى الموقع الإلكتروني وتحت الاسم المستعار تم تقييمي على المستوى الخامس، وهو أعلى مستوى ممكن في أربع فئات: الجبر، والهندسة، ونظرية الأعداد، والتركيبات.

وفي أحد الأيام قام صديق لي مصنف على المستوى الثالث في موقع (www.brilliant.org) بإحضار مسألة رياضية كان يعاني طوال الليل في محاولة لحلها لكنه لم يفلح، فكان يحتاج للمساعدة، فسألني إن كنت أستطيع حل هذه المسألة، وخلال عشرين دقيقة قمت بحل المسألة بطريقتين مختلفتين. سألني صديقي باستغراب شديد، كيف قمت بذلك؟ أجبته " بأمانة لا أعرف". والحقيقة أنه بعد دراستك للرياضيات أو أي موضوع آخر لمدة تزيد عن نصف قرن، تبدأ الأمور بالتخمر في دماغك، فأخيراً بدأت بالوصول إلى الملكة الرياضية، فدماغك وبشكل آلي يصبح قادراً على رؤية الأنماط،

والاتجاهات، واستغلالها بشكل سريع. ما زال سؤال صديقي يطاردني، وكلما تذكرته أشعر بشعور ساحر لا يوصف. وبعد كل شيء يبقى السؤال المنطقي: كيف يمكن لنا حقيقيةً حل المسائل الرياضية الصعبة؟ وما هي الخطوات التي يجب أن نسير عليها للوصول إلى النجاح؟ لقد بدأت التفكير بعمق بالخطوات الحقيقية لحل المسألة التي أميل للسير عليها. هناك بالفعل طريقة للجنون؛ لذا قررت توثيق هذه الخطوات لمنفعتي الخاصة، ولمساعدة الآخرين في حل المسائل الرياضية.

هدفي هو التأكيد على الفن بدلاً من العلم في حل المسائل الرياضية، حيث إن الفن يتضمن الشغف، والمشاعر، وربما القليل من الجنون. الناس الذين لا يفهمون الرياضيات، وعلى وجه الخصوص الناس الذين لا يفهمون ذلك الجزء الجمالي من الرياضيات يعتقدون أن الموضوع يتعلق بتطبيق منطق جاف وبارد يشبه منطق الزواحف لحل التمارين الكمية العقيمة، وبالتأكيد فإن للمنطق دوراً يلعبه في الرياضيات، إلا أنه، وبالنسبة للجادين في حل المسائل الرياضية والباحثين في الرياضيات، فإن الحدس، والشغف، والمشاعر النابعة من القلب هي أشياء مهمة تسبق العملية الاستكشافية.

وبدلاً من تقديم مجموعة من النظريات متبوعة بعدد من التمارين، أريد أن أتجنب الذهنية المتمركزة حول الأداة، فالنظريات وعلى الرغم من أهميتها تشبه الأدوات التي يجب استخدامها بروية وتأن، فالأدوات وحدها غير قادرة على منحنا نجاراً متميزاً وخبيراً، بل على العكس فالنجار الخبير هو القادر على التوظيف الناجح والاستخدام الجيد للأدوات؛ ولهذا السبب سوف تُستخدم النظريات بشكل قليل كلما دعت الحاجة لذلك وضمن سياق حل المسائل الرياضية. إن عملية استكشاف المسألة الرياضية أهم بكثير من مجرد تلقين النظريات واستذكارها ، نريد أن نتعلم كيف نتجاوز حالة الرعب والخوف التي تصيبنا عندما نقرأ نص المسألة الرياضية أول مرة، وذلك من خلال التمعّن في عملية الاستكشاف التي ستقودنا في النهاية للوصول إلى حل جميل ومبتكر للمسألة. وسأحاول من خلال هذا الكتاب أن أعلمك كيف تقوم بذلك، المنطق وحده لن يساعدك في الوصول إلى هناك، فأنت ستكون بحاجة إلى الشغف، والحدس، والشجاعة، والإصرار، وعدم الاستهتار.

لا بد أن أشير إلى وجود العديد من الخطوات المختلفة – التي قد تبدو أحياناً متشابهة – لحل المسائل. والخطوات التي سرت عليها في حل المسائل ليست هي الخطوات الوحيدة، كما أنها ليست الخطوات الأصلية بالكامل، إنها ببساطة الخطوات التي كانت مفيدة لي. ولا يوجد أي شخصين يتبعان

الخطوات نفسها في حل مسألة رياضية ما، وعلى الرغم من أن البشر يمتلكون استعدادات ودوافع وشخصيات مختلفة، فإنه يوجد العديد من الأفكار، والمبادئ، والنظريات المشتركة التي يمكن دراستها، وتعلمها، وإتقانها. هدفي هو تقديم إستراتيجيتي وخطواتي في حل المسائل وكل أملي أنك سوف تتعلم من هذه الخطوات وتتبناها لتصبح جزءاً من أسلوبك الخاص والمبدع. وبعد كل شيء فإن ما تحتاجه هو القليل من الممارسة، فالممارسة هي كلمة السر في النجاح، وليس القدرات الفطرية، أو العبقرية التي نمتلكها. فالرياضيات المدهشة والرائعة لم تولد، ولكنها مثل الفولاذ في مرجل حل المسائل الرياضية المثيرة للتحدي. أتمنى لك حظاً طيباً في مسعاك لكي تصبح على مستوى عالمي في حل المسائل الرياضيات.

تم تقسيم الكتاب إلى بابين، الباب الأول يتناول خطوات حل المسائل الرياضية وإستراتيجياتها، فيما يحتوي الباب الثاني على مجموعة من المسائل الرياضية الصعبة مع مناقشة كاملة للمسائل والحلول، والمسائل التي تضمنها الباب الثاني جاءت على شكل مسائل رياضية في إطار الأولمبياد، حيث إنها تشبه الأولمبياد بالنسبة للرياضيين، لكن لا تقلق، فأنا أريد أن أشعرك بأنك جالس حول المدفأة تحل المسائل الرياضية مع عمك العزيز ريك . سوف نأخذ أنفسنا في رحلة ممتعة لحل المسائل الرياضية نتشارك فيها أفكارنا ومشاعرنا وشغفنا. هذه هي الطريقة التي تعمل بها الرياضيات الحقيقية، ومن المحتمل أن هذا هو السبب الذي يجعلنا نبدو غريبي الأطوار مقارنة مع زملائنا.

المؤلف

تمهيد

العديد من المسائل الرياضية في الأولمبياد يمكن حلها بسهولة إذا كان لديك الفكرة الذكية والصحيحة، والصعوبة هنا تكمن في أن "الفكرة الذكية والصحيحة" عادةً ما تكون ذكية لدرجة أنها تشبه الأرنب الذي يريد الساحر أن يخرجه من تحت القبعة، وعندما تظهر لك الفكرة الذكية تشعر بالغباء؛ وذلك لأن الفكرة مبدعة جدًّا وبعيدة كل البعد عن عمليات التفكير الاعتيادية لدينا، حيث تشعر أنك لا تستطيع التفكير في مثل هذه الفكرة من تلقاء نفسك، وبالتأكيد فإن من لديهم عبقرية فائقة هم الوحيدون القادرون على الحصول على مثل هذه الأفكار. وهذا يشكل تحديًّا جديًّا للراغبين في التعامل مع حل المسألة الرياضية، فإذا لم تكن عبقريًّا بالفطرة، فهل هذا يعني أنه لا يوجد لديك أي أمل في حل مسائل رياضية صعبة وحقيقية، وهل يوجد طريقةٌ ما تمكن الإنسان العادي من تجاوز العقبات العقلية للوصول إلى اكتشاف الفكرة الذكية والصحيحة التي تحل المسألة؟

بعد العديد من السنوات في التعامل مع المسائل الرياضية أصبح لديَّ العديد من الرؤى والأفكار التي تتعلق بحل المسائل الرياضية الصعبة. أولاً: أنا أتحدى العبارة التي تقول إن الرياضيات هي مجال يقتصر على العباقرة الفطريين، فالحقيقة أن كل ما هنالك أن البشر عادةً لا يمتلكون الكفاءة المطلوبة في الرياضيات، حيث إن العقول البشرية ليست مصممة لممارسة الرياضيات، إنها أحد الآثار الجانبية التطورية – حادث طبيعي – هي التي تمكننا من القيام بأي تفكير رياضي على الإطلاق، وأعتقد أن العبقرية الرياضية هي نتاج للعمل الشاق والمضني أكثر من كونها ميولاً فطرية تولد مع الإنسان.

ثانياً: يمكننا أن نصل لما يبدو أنه حلول معقدة للمسائل الرياضية من خلال الاستكشاف المكثف، فالصورة التي تظهر العبقري وقد تناول فنجاناً من القهوة مساء يوم الأحد وتوصل بهدوء إلى الفكرة العبقرية الصحيحة لحل المسألة هي على الأغلب مجرد وهم، فنحن وبشكل عام عندما نطلع على مسألة رياضية محلولة لا نرى الجهود المضنية والمحاولات الفاشلة التي تم القيام بها للوصول إلى حل هذه المسألة.

المفتاح الرئيس في حل العديد من المسائل الرياضية الصعبة يكمن في الأنماط الأساسية التي تظهر من خلال المسألة نفسها، فبعد قراءة المسألة وفهمها يجب عليك أن تستكشف المسألة، وعملية الاستكشاف هذه تنتج البيانات، وهي بدورها تنتج الأنماط، والأنماط على الأغلب دائماً ما تكون مهمة، حيث إنها وبدقة هي التي توفر لنا الفكرة المفتاحية – الرؤية البراقة – التي تسمح لنا بحل المسألة. وبمجرد أن تحدد النمط، قم بصياغته على شكل تخمين، ثم قم بإثبات هذا التخمين من خلال استخدام إستراتيجيات البرهان الرياضية الأساسية. وعند هذه النقطة أصبحت قريبًا من الوصول إلى الحل، حيث إنك وجدت الفكرة المفتاحية لحل مسألتك. ومن وجهة النظر هذه فإن المهارة الأساسية والمهمة لحل المسائل الرياضية هي عملية استكشاف المسألة، إذ إن "الاستكشاف"، وليس العبقرية الفطرية، هي كلمة السر في النجاح في حل المسائل الرياضية.

في هذا الكتاب سوف نسلط الضوء على عملية استكشاف المسألة، من الممكن ألا تكون قادرًا على حل جميع المسائل الرياضية التي تواجهها، لكن ستكون قادرًا على فهم الطريقة، كما ستكون قادراً على فهم كيف يتعامل الرياضيون مع المسائل الجديدة في الرياضيات. كما أن التفكير بشكل نقدي وإبداعي هي مهارات مهمة يمكن أن نتعلمها من خلال التعامل مع المسائل الرياضية.

عن المؤلف

ريتشارد بيكيان (Richard M Beekman) هو مهندس كهربائي ورياضي، والسيد بيكيان متخصص في نظرية التركيبات العددية، ولديه أكثر من ورقة بحثية منشورة في هذا المجال، كما أنه مخترع دالة التوليد اللوغاريتمي ودالة التوليد الملاحظ اللتين تُعدَّان من الأدوات الجديدة في مجال نظرية التركيبات العددية. وعلى الموقع الإلكتروني وتحت الاسم المستعار تم تقييمه على المستوى الخامس، وهو أعلى مستوى ممكن في الجبر والهندسة ونظرية الأعداد والتركيبات. وقد قام السيد بيكيان بدراسة الرياضيات طوال عاماً، وهو يقيم في مدينة سانت لويس في ميسوري.

المحتويات

مقدمة المترجم .... هـ

شكر وتقدير .... ز

مقدمة المؤلف .... ك

عن المؤلف .... ف

تمهيد .... س

الباب الأول: عملية حل المسألة الرياضية ١

الفصل الأول: عملية حل المسألة ٣

الفصل الثاني: تغلب على خوفك ٧

سيكولوجية حل المسألة ٧

الممارسة، الممارسة، الممارسة ٧

فكّر في أنك خبير في حل المسألة ٨

الخرافات الرياضية ٨

لا تحاول أن تكون حذقاً ٩

كن مثابراً ٩

الرياضيات فن ١٠

حوّل الفشل إلى نجاح ١٠

الفصل الثالث: افهم المسألة ١٣
اقرأ نص المسألة ثلاث مرات ١٤
ارسم شكلاً ١٤
أي نوع من المسائل هي؟ ١٤
حدد القيود ١٥
صغ فرضياتك ١٦
كيف سيكون شكل الحل؟ ١٦
الفصل الرابع: استكشف المسألة وابحث عن الأنماط ١٧
حدد إستراتيجية الهجوم الغاشم ١٧
احصل على الجواب ١٩
استكشف المسألة ١٩
ابحث عن الأنماط ٢٣
احترس من الأنماط الخاطئة ٢٥
الفصل الخامس: صياغة التخمينات ٢٧
الفصل السادس: أثبت تخميناتك وحل المسألة ٣١
البرهان المباشر ٣٢
البرهان بالتناقض ٣٢
البرهان بالمكافئ ٣٣
العمل للخلف ٣٣
البرهان من خلال البناء ٣٤
برهان الوحدانية ٣٤
البرهان باستخدام المثال المناقض ٣٥

الاستقراء الرياضي ٣٥
التكتيكات الرياضية........ ٣٧
الفصل السابع: تحقق من حلك ٣٩
الفصل الثامن: لمع الحجارة........ ٤٣
الفصل التاسع: فكِّر وتعلم ٤٥
الباب الثاني: حل المسائل الرياضية باستخدام إستراتيجية المدفأة ٤٧
مقدمة الباب الثاني ٤٧
المسألة ١. مجموع الجذور ٤٩
المسألة ٢. حاصل ضرب الظلال ٥٣
المسألة ٣. كثيرة الحدود الواحدية من الدرجة الرابعة........ ٥٧
المسألة ٤. لا يوجد جذور سالبة ٦١
المسألة ٥. دالة دورية ٦٥
المسألة ٦. قوى العدد 3........ ٦٩
المسألة ٧. أعداد صحيحة في متتالية ٧٣
المسألة ٨. أقل مسافة كلية ٧٥
المسألة ٩. القواسم الصحيحة الموجبة........ ٧٩
المسألة ١٠. خطأ الآلة الحاسبة........ ٨٣
المسألة ١١. قناة الجذر........ ٨٧
المسألة ١٢. اثنان، ثلاثة، خمسة........ ٩١
المسألة ١٣. مجموع المربعات الخمسة ٩٣
المسألة ١٤. أوجد القيمة الصغرى ٩٧
المسألة ١٥. القيمة الصغرى ١٠١

المسألة ١٦. مجموع كلاسيكي ١٠٥
المسألة ١٧. مقلوب المجموع ١٠٩
المسألة ١٨. منطق الأيام ١١٣
المسألة ١٩. أسس زوجية ١١٥
المسألة ٢٠. رمي قطعة نقد معدنية ١١٩
المسألة ٢١. المجاميع المتساوية ١٢٣
المسألة ٢٢. قابلية القسمة على 5 .... ١٢٧
المسألة ٢٣. معادلة ديوفنتية ١٣١
المسألة ٢٤. معادلة دالية ١٣٥
المسألة ٢٥. معادلة أسية ١٣٩
المسألة ٢٦. القيمة المطلقة ١٤١
المسألة ٢٧. إيجاد الأسس ١٤٥
المسألة ٢٨. الزوايا المتطابقة ١٤٩
المسألة ٢٩. تنصيف الزاوية ١٥١
المسألة ٣٠. الترتيب باستخدام المتوسط ١٥٣
المسألة ٣١. متطابقة مثلثية ١٥٥
المسألة ٣٢. حاصل ضرب زوجي ١٥٩
المسألة ٣٣. مربع كامل ١٦٣
المسألة ٣٤. الترتيب الصفي الرباعي ١٦٧
المسألة ٣٥. معادلة لوغاريتمية ١٧١
خاتمة: ١٧٥

الملاحق: ١٨٣

الملحق A . مسلمات حل المسألة ١٨٣

الملحق B . نظريات مفيدة ١٨٥

الملحق C . التكتيكات الرياضية ٢٠٠

الملحق D . توصيات لمزيد من القراءة ٢٠٤

مصادر المسائل ٢٠٥

ثبت المصطلحات: ٢٠٧

عربي – إنجليزي ٢٠٧

إنجليزي – عربي ٢١٩

كشاف الموضوعات ٢٣٣

الباب الأول

عملية حل المسألة الرياضية

الفصل الأول

عملية حل المسألة

تم تنظيم فصول الكتاب بحيث تتمحور حول المنهجية العامة لحل المسألة الرياضية، وباستثناء هذا الفصل الأول فإن كل فصل من الفصول اللاحقة سيناقش خطوة واحدة من خطوات المنهجية العامة لحل المسألة الرياضية.

لكي تكون جيداً في عملية حل المسألة الرياضية يجب أن يكون لديك الاستعداد للسير نحو المجهول، وخوض المخاطر الصعبة، واستكشاف مناطق جديدة، كما يجب أن تضع في اعتبارك إمكانية الضياع وفقدان الطريق الصحيح. فمنهجيتي العامة في حل المسألة يمكن التعبير عنها من خلال عدد من الخطوات المتسلسلة، ولكن ما عليك فهمه جيداً أن هذه الخطوات عند الممارسة الحقيقية ليس بالضرورة أن تنفذ بالترتيب الذي وردت فيه. فعندما تفشل إستراتيجياتك في حل المسألة، وتشعر بالضياع قد تكون بحاجة إلى العودة إلى البداية، أو إلى الخطوات السابقة في هذه المنهجية. لا تقلق بشأن ذلك، فهذا طبيعي تماماً، حيث إن ارتكاب الأخطاء ومعالجتها من خلال أفكار جديدة جزء لا يتجزأ من منهجية حل المسألة.

نقدم فيما يلي الخطوات الأساسية لحل المسائل الرياضية الصعبة:

الخطوة ١. تغلب على خوفك. (هذه هي سيكولوجية حل المسألة)

الخطوة ٢. افهم المسألة.

الخطوة ٣. استكشف المسألة وابحث عن الأنماط.

الخطوة ٤. صغ تخميناتك.

الخطوة ٥. أثبت تخميناتك وحل المسألة.

الخطوة ٦. تحقق من حلك.

الخطوة ٧. لمع الحجر.

الخطوة ٨. راجع وتعلم.

هذه الخطوات الثماني تتضمن العمليات التي عادةً ما استخدمها في حل المسائل الرياضية الصعبة والمشابهة للمسائل التي تأتي في الأولمبياد. نحن بحاجة أن نضع بعضاً من اللحم على العظم، وستقوم بذلك في الباب الثاني من الكتاب، حيث نجلس عند المدفأة ونتحدث عن حلول بعض المسائل الرياضية الجيدة.

عندما نحل المسائل الرياضية علينا أن نتسم بالمرونة في التفكير، وعلينا التفكير في هذه الخطوات الثمانية باعتبارها إطاراً عاماً لحل المسائل الرياضية ونتجنب النظر إليها كوصفة طبية يجب اتباعها في جميع الحالات.

وقبل أن ننطلق إلى التفصيلات المتعلقة بكل خطوة من هذه الخطوات الثماني، دعونا نتوقف قليلاً لنناقش ماذا يعني الرياضيون بعبارة "حل المسألة الرياضية".

في البداية لا بدَّ أن نشير إلى أن الرياضيين يهتمون بالمسائل وليس بالتمارين. فالتمارين هي الأشياء التي يتم تعلمها في المدارس العامة، وتتسم بأنها قياسية، ونمطية، وجاهزة، ومفهومة، ومعرّفة بشكل واضح. حل هذه التمارين لا يحتاج سوى تعويض بعض الأعداد في قاعدة أو صيغة سحرية مثل الصيغة العامة للمعادلة التربيعية، حيث تتناول آلتك الحاسبة، وتقوم بدون تفكير بتعويض بعض الأعداد، ثم تضغط على أحد الأزرار لتحصل على الجواب، ومن ثَم تحصل على تقدير "A" في مقرر الجبر في المدرسة.

دعوني أصدقكم القول، ليس هذا ما يعنيه الرياضيون بكلمة "مسألة"، فالمسألة الرياضية الحقيقية هي شيءٌ ما جديد يشعرك بالخوف عندما تراه للمرة الأولى، وربما تشعر بالضياع وتفقد الأمل في قدرتك على إيجاد الحل، حيث لا يوجد لديك بوصلة، أو خارطة طريق، أو هدايا مجانية تهبط عليك من السماء. فأنت تمشي وحيداً في طريق مظلم في غابة مظلمة في ليلة شديدة الظلمة وعليك وحدك أن تجد حلاً لهذه المسألة، حيث إنها تتطلب منك أن تبحث بعمق عن أفكار جديدة وخلاّقة، وربما تتعرض لخطر السقوط والفشل، ولكن عليك أن تبقى صامداً وتحاول النهوض من جديد. إن المسألة الرياضية

الحقيقية هي شيءٌ ما يشعرك بالعجز والضياع وعليك أن تجد طريقاً ما للخروج من هذا المأزق. وخلال هذا الطريق قد تجد نفسك مضطرًّا لأن تخترع رياضيات جديدة أو تثبت نظريات جديدة.

إن حل المسألة الرياضية هو شيء يختلف عن مجرد إيجاد الجواب لهذه المسألة، وهي ببساطة ليست مجرد رقم مثل " 5 ". عندما يطلب الرياضيون حلاً لمسألة رياضية فإنهم يبحثون عن تسلسل واضح من الخطوات المنطقية التي تتسم بالأصالة، والاتزان، والثبات، توضح بشكلٍ لا لَبْسَ فيه صحة عبارةٍ رياضيةٍ ما أو استنتاجٍ معين. وهذا يمثل مستوىً عاليًا جدًّا من التميز في التفكير النقدي والإبداعي.

دعونا الآن نستكشف كل خطوة من خطوات المنهجية العامة لحل المسألة الرياضية.

الفصل الثاني

تغلب على خوفك

سيكولوجية حل المسألة

إن الجزء الأكثر صعوبة في حل المسألة الرياضية يتمثل في تجاوز الصدمة النفسية الأولية عند قراءة نص المسألة. فالمسائل الرياضية عادةً ما تكتب باستخدام رموز خاصة، ومصطلحات تخصصية، ويمكن لها أن تكون مخيفة لحدٍّ كبيرٍ للناس الذين ليسوا على درايةٍ بِلُغَةِ الرياضيات، وحتى هؤلاء الناس الذين لديهم درايةٌ تامةٌ باللغة الرياضية يجدون صعوبات في التعامل مع المسائل الرياضية حيث إن المسائل الحقيقية في الرياضيات (البحثية أو الأولمبياد) لا تشبه أيَّ شيءٍ آخر رأيته من قبل، حيث إنها، وعلى العكس من التمارين والتدريبات، تتسم بالصعوبة حتى لأفضل العقول الرياضية. البشر بطبعهم غير جيدين في الرياضيات، حيث إن قدراتنا الطبيعية غير المدربة على التفكير المجرد بالكاد تكفي لإدراك الرياضيات في أي مستوى من مستوياتها، كما أن أكثر العقول الرياضية تميُّزاً لا بدَّ أن تعاني – ربما للعديد من السنوات – لفهم المسائل الرياضية الصعبة. إن أي تفكير بأنك غبيٌّ، أو لست ذكيًّا بما يكفي، أو لا تمتلك الكفاءة اللازمة لحل المسائل الرياضية سوف يكون له عواقب مؤلمة بالنسبة لك، ومن ثَمّ فإن عليك أن تبعد تماماً من رأسك أيَّ أفكارٍ سلبية تتعلق بكونك غير مؤهل لحل المسائل الرياضية.

الممارسة، الممارسة، الممارسة

ما الذي يتطلبه الأمر حقًّا لتصبح جيداً في حل المسائل الرياضية؟ ربما تعتقد أن الأمر يتعلق بشيءٍ ما مثل القدرات الطبيعية، أو امتلاك الموهبة، أو الحصول على درجة عالية في اختبارات الذكاء.

وفي الحقيقة أجريت العديد من الدراسات المتعلقة بهذا الموضوع، وخَلُصت إلى أن العامل الرئيس الذي يساعدك على أن تصبح خبيراً في أي مجال من المجالات هو الممارسة، وبشكل عام فإنك تحتاج إلى 10,000 ساعة من الدراسة والممارسة لتصبح خبيراً في أي مجال من المجالات: العزف على الكمان، أو الفيزياء النووية، أو الرياضيات. إن هذه أخبار جيدة حيث إنها تعني أنك لديك الإمكانية لتصبح بارعاً في حل المسائل الرياضية، حيث إن كل ما تحتاجه هو الدراسة والممارسة. إن الأمر بهذه البساطة!

فكِّر في أنك خبير في حل المسألة

من المهم جدًّا أن يكون لديك اتجاهات إيجابية عندما تتعامل مع المسائل الرياضية. فبدلاً من التفكير سلبيًّا بالمسألة كأن تقول "أنا لست جيداً في الرياضيات، ومن ثَمّ لا يمكنني أبداً أن أحل مسألةً مثل هذه. عليك أن تفكر إيجابيًّا وتقول: "إنَّ هذه مسألة ممتعة، قد يكون بإمكاني أن أكتشف أو أثبت نظرية رياضية جديدة".

بالنسبة لي فإن التفكير في أنك لا تستطيع حل مسألة رياضية يشبه لحد كبير تفكير الصياد بأنه غير قادر على التقاط أي سمكة من المحيط. لماذا يتملكك هذا التفكير؟ أعتقد أن السبب في ذلك يعود إلى أن معظمنا لم يتعامل مطلقاً مع مسائل رياضية حقيقية، حيث إن النظام المدرسي السائد تم تصميمه بشكل لا يساعد على الحصول على مفكرين مستقلين ومبدعين.

الخرافات الرياضية

يجب علينا التخلص من العديد من الخرافات القديمة التي لم تعد تُجْدِ نفعاً، ونستبدلها بنموذج عقلي أفضل لحل المسائل الرياضية، وفيما يلي العديد من الخرافات التي يمكن أن تكون قد سمعتها، وبما أنها أساطير سخيفة جدًّا سأكتفي بذكرها فقط.

الخرافة ١. يجب أن تكون عبقريًّا لكي تفهم الرياضيات.

الخرافة ٢. لا يوجد شيء جديد لتكتشفه في الرياضيات.

الخرافة ٣. تحتاج للحصول على درجة الدكتوراه لكي تقوم باكتشافات رياضية جديدة.

الخرافة ٤. الرجال فقط هم الجيدون في الرياضيات، وليس النساء.

الخرافة ٥. الشباب فقط هم القادرون على اكتشاف الأفكار الجديدة والمميزة.

الخرافة ٦. الرياضيات ليست أكثر من مجرد منطق.

الخرافة ٧. المشاعر لا مكان لها في الرياضيات.

لا تحاول أن تكون حذقاً

الخرافة١ هي أسطورة تسبب الوهن بشكل خاص لأي شخص يريد أن يصبح جيداً في حل المسائل الرياضية. هنالك سوء فهم كبير بأنك يجب أن تكون ذكيًّا لكي تفهم الرياضيات، ويجب أن تكون عبقريًّا لكي تكتشف معرفة رياضية جديدة. إن هذا غير منطقي! فالعبقرية مفهوم غامض نوعاً ما، حيث إن بعض الناس يعتقدون أنك تُولَد عبقريًّا. المشكلة في وجهات النظر هذه أنها غير جديرة بالثقة، حيث إنك لا تستطيع البدء بالعمل بناءً على هذه المفاهيم. أنا لديَّ رؤية مختلفة للعبقرية: العبقرية هي نتاج للعمل الشاق.

هناك العديد من المسائل الرياضية التي تبدو صعبة ولكن لها حلول بسيطة وذكية. إذا بدأت حل المسألة وأنت تعتقد أنك ستكون عبقريًّا وستجد حلاً برّاقاً؛ ستقع في خطر إضاعة بعض الوقت في محاولات خارج الصندوق، ثم تكتشف أنك لم تصل إلى أي شيء. المنحى الأفضل للدخول في حل المسألة هو أن تركز على المهمة التي بين يديك، لا تحاول أن تكون حذقاً، وبدلاً من ذلك حاول أن تستكشف المسألة، وتجزئها إلى مجموعة من الأجزاء، وتنظر إلى الحالات الصغيرة، وتجمع البيانات العددية وتحللها، وتبحث عن الأنماط. وبعد بذل القليل من العمل الشاق ستكتشف الأنماط التي ستقودك إلى الحل الصحيح الذي ربما، وبعد كل ذلك، ستجده بسيطاً وبرّاقاً.

كن مثابراً

التمارين الروتينية الأكثر بساطة هي التي سوف تساعدك في محاولتك الأولية لحل المسألة، ولكن المسائل الرياضية الحقيقية صعبة، وستتحدى قدراتك الإبداعية للوصول إلى الحل. فالإصرار بالتأكيد سوف يؤتي ثماره على المدى الطويل، والشخص الجيد في حل المسائل لا بدّ أن يتسم بالصلابة؛

لذا عليك أن تطور من قدراتك الذهنية لرفض الاستسلام أثناء حل المسألة. إذا كنت غير قادر تماماً على حل مسألتك، ربما تكون بحاجة إلى وضعها جانباً لفترة من الوقت ثم تعود إليها في وقت لاحق، حاول أن تعمل على حل بعض المسائل الأخرى، وفي النهاية لا بد أن يخطر في ذهنك فكرةٌ ما قد تساعدك على حل مسألتك. لا تتوقف أبداً عن القتال.

الرياضيات فن

آمل أن أساعدك على رؤية – وخصوصاً عندما نبدأ في حل المسائل في الفصل الثاني من الكتاب– أن الرياضيات هي نوع من أنواع الفنون الجميلة، مثل جميع الفنون الأخرى تتضمن المشاعر، والأحاسيس، والحدس. ويمكن لأي شخص أن يقوم بعمل رياضي مميز (المبتدؤون والخبراء، الرجال والنساء، وحتى الأطفال في موقف الحافلات)، العقدة الرياضية ستتلاشى لديك عندما تتعلم أن تنظر إلى الرياضيات باعتبارها وسيلة للتعبير الفكري المفتوح، فالرياضيات ليست منقوشة على الحجر حيث إنها دائمة التطور والتغيير، ودائماً ما يوجد هناك مساحة إضافية فارغة تتسع لأفكارك الجديدة.

الرياضيات موضوع جميل، وهي عبارة عن أحد أنواع الفنون الجميلة مثل الشعر، والرسم، والموسيقى، والنحت، وذلك على الرغم من انضباطها وقيودها الصارمة. روائع الرياضيات هي بُنى مجردة للعقل البشري تعكس روعة الكون، وجماله، وبساطته. لا تخشى أو تهاب الرياضيات، وتعلم دائماً أن تطور وتخترع الرياضيات الخاصة بك.

حوّل الفشل إلى نجاح

ماذا يحدث عندما تحاول بشكل مضنٍ أن تحل مسألةً ما ولكنك لا تفلح في ذلك؟ الذي يحدث هو أنك عملت بجد واجتهاد لحل المسألة، ولكنك في النهاية تجد أنك قد وصلت إلى حل شيء آخر مختلف، كن على ثقة بأنك دائماً ستصل إلى شيءٍ ما، والشيء الذي وصلت إليه قد لا يكون متعلقاً بالمسألة التي تريد حلها، ولكن على الرغم من ذلك فإنك وفي أثناء محاولتك لحل المسألة المعطاة قد تكتشف أو تجد أو تصل إلى شيء ما مثير للإعجاب. وفي هذه الحالة اعكس فشلك إلى نجاح من خلال

تحويل الأشياء التي توصلت إليها إلى نظرية جديدة. تخيل أن ما قمت باكتشافه بالصدفة، وعلاوة على كونه مثيراً للإعجاب صُنِّف على أنه نظرية جديدة، وهذه عادةً الطريقة التي تنتج من خلالها الأبحاث. حاولنا أن نحل مسألةً ما، ولكننا فشلنا في حلها، وانتهينا لحل مسألة أخرى. حسناً، هذا شيء جيد، اكتب ورقة بحثية صف من خلالها المسألة الجديدة التي توصلت إلى حلها بالصدفة، وتظاهر كأنها كانت المسألة التي حاولت حلها من البداية، وفشلت في ذلك، ثم قدّم نظريتك الجديدة مع إثباتها الجميل والبرّاق الذي تعرفه مسبقاً (لأنك توصلت إليه بالصدفة)، ولن يعرف أحد أكثر من ذلك. حاول دائماً أن تحول الفشل إلى نجاح.

الفصل الثالث

افهم المسألة

إن الخطوة الأكثر أهمية من ضمن خطوات عملية حل المسألة الرياضية هي الخطوة المتعلقة بفهم المسألة التي تحاول حلها. هذه الخطوة أكثر أهمية من باقي خطوات عملية حل المسألة الرياضية الأخرى لأنها تمثل المكان الذي عادةً ما يتعثر ويفشل فيه الكثير من الناس، إنها طبيعة بشرية حيث إننا نريد أن نسرع ونجتاز هذه الخطوة للوصول إلى الأشياء الأكثر متعة مثل استكشاف وحل المسألة. ولكن إذا لم تفهم المسألة بشكل واضح، وتفهم أهدافها وقيودها، فإما أنك ستفشل في حلها، أو أنك ستحل المسألة الخطأ. لقد قمتُ بذلك في العديد من المرات حتى أصبحتُ أقرأ المسألة التي أمامي ثلاث مرات قبل أن أفكر حتى باستكشافها، حيث إنه من المحبط والمحرج أن تبتكر حلاً رائعاً للمسألة الخاطئة (لا تقم بذلك!).

افرض على سبيل المثال أن المسألة التي بين يديك تطلب منك إيجاد مجموع الجذور لكثيرة حدود، إذا لم تركز جيداً في نص المسألة، قد تذهب في طريق خاطئ من خلال محاولة إيجاد جميع الجذور، ولكن المسألة لم تطلب منك إيجاد جذور كثيرة الحدود، ولكنها طلبت منك أن تجد مجموع هذه الجذور. إن هذه مسألة مختلفة تماماً، ويوجد العديد من المسارات التي يمكن أن نسلكها تسمح لنا بتجنب إيجاد الجذور الحقيقية، يمكن لنا أن نستخدم علاقات فيتا الجبرية لإيجاد مجموع الجذور من خلال معاملات كثيرة الحدود بسهولة. وبكلمات أخرى فإننا نستطيع إيجاد مجموع الجذور من دون حتى أن نجد الجذور نفسها.

إنَّ الخطوة المتعلقة بفهم المسألة هي في الواقع خطوة مهمة جدًّا؛ لذا لا تحاول أبداً القفز عنها وتجاوزها، وحاول دائماً أن تكون استثنائيًّا ومنضبطاً تماماً في هذه الخطوة. والآن ماذا نعني بـ "فهم المسألة؟" وكيف نقوم بذلك؟

اقرأ نص المسألة ثلاث مرات

الشيء الأول الذي عليك القيام به عند تعرضك لمسألة رياضية جديدة هي أن تقرأ بعناية نص المسألة ثلاث مرات على الأقل، وعليك أن تكون متأكداً تماماً أنك فهمت بوضوح نص المسألة، وحاول أن تقوم بذلك بنشاط وفعالية وأن تبتعد عن السلبية، وقراءة نص المسألة بفعالية تعني أن تقوم في أثناء القراءة بتسجيل العديد من الملاحظات باستخدام القلم والورقة، وإذا كان نص المسألة مكتوب بلغة تخصصية وصعبة حاول أن تعيد كتابة المسألة باستخدام كلماتك الخاصة التي تستخدمها في الحياة اليومية، وعندما يكون هناك معادلات أو متباينات في نص المسألة حاول استبدال بعض المتغيرات بالأرقام، وقم بمجموعة من الحسابات لترى ماذا سيحدث. أي شيء قد يساعدك في فهم المسألة هو بالتأكيد أمرٌ جيد، فأنت لا تستطيع حل مسألة لم تفهمها. إذا رأيت أن المسألة المعطاة صعبةً جدًا لا تتردد في تبسيطها، حاول في البداية أن تحل نسخة أسهل من المسألة المعطاة، فهذا قد يساعدك على أن تفهم كيف تجد حلاً للمسألة الأصعب.

ارسم شكلاً

عندما يكون ذلك ممكناً، لا تتردد في رسم صورة أو شكل يعبر عن المسألة التي أمامك. وهذا واضح تماماً عندما نتعامل مع المسائل الهندسية، كما يمكن استخدامه أيضاً عند التعامل مع المسائل الجبرية. حاول أن تحول المتغيرات إلى أرقام، وقم برسم المعادلات لترى كيف يبدو شكلها، وإذا وجدت أرقاماً في المسألة حاول أن تعمل لها تمثيلاً بصريًّا من خلال وضعها في مجموعات بناءً على نمط معين، فالعقل البشري، وبشكل استثنائي، عادةً ما يكون جيداً في التفكير البصري المكاني، وعقولنا تفكر بصريًّا باستخدام الصور والأشكال؛ لذلك حاول عندما يكون ذلك ممكناً أن ترسم صورة أو شكلاً تعبر عن المسألة التي تحاول حلها.

أي نوع من المسائل هي؟

ما نوع المسألة التي أمامك؟ إلى أي فرع من فروع الرياضيات تنتمي؟ من الجيد أن تطرح هذا النوع من الأسئلة، حيث إن أسئلة مثل هذه سوف تعطيك فكرة عن ماهية الطريقة أو النظرية التي ستطبقها لحل

مسألتك. فالمسألة الهندسية تتطلب طرائقَ بصرية- مكانية، ورسم أشكال مساعدة، وبالطبع استخدام النظريات الهندسية المشهورة. فإذا كانت مسألتك جبرية، فإنك بالتأكيد تحتاج أن تستخدم بعض الأفكار والنظريات الجبرية لتجد حلاً ناجحاً للمسألة مثل تحليل كثيرات الحدود. وكن على استعداد أن تصنف المسألة وتحدد ما نوع المسألة الذي سيقلل بشكل كبير من حجم المساحة المخصص لحلها، فهذا يساعدك على تركيز انتباهك على النظريات والطرائق الأكثر قابلية للتطبيق على مسألتك.

جورج بوليا وهو أحد المعلمين العظام في الرياضيات اقترح وجود نوعين أساسيين ومختلفين من المسائل الرياضية: المسائل من النوع "أوجد"، والمسائل من النوع "أثبت". المسائل من النوع "أوجد" عادةً ما تطلب منك إيجاد شيء ما، كأن تجد تركيباً معيناً، أو عنصراً معيناً تحقق فيه بعض الخصائص، أو عدداً ما. فمسائل التوافيق على سبيل المثال يمكن أن تطلب منك أن تجد عدد الطرائق المختلفة لترتيب مجموعة من العناصر، أو قد تطلب منك المسألة أن تجد القيمة العظمى لدالة معينة معرفة على مجال معين. هذه هي المسائل من النوع "أوجد". أما المسائل من النوع "أثبت" فهي مسائل تطلب منك أن تثبت شيئاً ما معطى على شكل عبارة رياضية مثل "الجذر التربيعي للعدد 2 غير نسبي"، ويطلب منك إثبات صحة هذه العبارة. وفي بعض الأحيان يطلب منك أن تثبت خطأ عبارةٍ ما. سيكون من المفيد جدًّا أن تطرح على نفسك مثل هذه الأسئلة؛ لأنها تساعدك على تركيز انتباهك على الأنواع الصحيحة من الأفكار التي ستحتاجها لحل المسألة.

حدد القيود

إذا وجدت قيوداً في المسألة، فعليك أن تدقق بها بانتباه وحذر. قد يذكر في المسألة أن " x عددٌ صحيحٌ موجبٌ"، وقد تنص المسألة على أن " x عددٌ صحيحٌ غير سالب". من السهل أن تفقد القدرة على التمييز الدقيق بين هاتين العبارتين، وذلك على الرغم من أهمية التمييز بينهما. فالعبارتان على الرغم من التشابه الواضح بينهما إلا أنهما يتضمنان أشياء مختلفة. إذا كانت x عددٌ صحيحٌ موجبٌ فإنها لا يمكن أن تكون عدداً سالباً أو صفراً، ولكن إذا كانت x عدداً صحيحاً غير سالب فيمكن لها أن تكون صفراً. في بعض الأحيان قد تؤدي هذه الفروق الظاهرة والبسيطة إلى فروق كبيرة في أثناء حل المسألة. التفصيلات الصغيرة مهمة جدًّا في الرياضيات، لا تخف من القيود الواردة في المسألة، فعادةً ما تكون هي أفضل

أصدقائك، حيث إنها عادةً ما تقلل من أنواع الطرائق والنظريات التي تحتاجها للحل؛ لذا عليك أن تتعلم أن تحبها وتكتبها دائماً على ورقة، فتدوين وكتابة الأشياء هو جزء من ضبط وتهذيب عملية حل المسألة.

صغ فرضياتك

دون أو اكتب فرضياتك، فقد تحتاج أحياناً أن تقوم بصياغة بعض الفرضيات للمضي قدماً في حل المسألة، وقد يحدث هذا إما لأن الشخص الذي قام بكتابة نص المسألة نسي أن يشير إلى بعض التفصيلات المهمة، أو ببساطة لأنك قد تجد أنه من المفيد لك أن تقوم بصياغة بعض الفرضيات لكي تحرز تقدماً في حل المسألة، وفي هذه الحالة الأخيرة عليك أن تثبت الفرضيات التي قمت بصياغتها في مرحلة لاحقة من الحل. أحد الأمثلة على صياغة الفرضيات التي تعرضت لها تتعلق بدالة الجذر التربيعي، إذا سألت أي شخص ما هو الجذر التربيعي للعدد 4 سيخبرك أن الجواب هو 2، ولكن 2- هو أيضاً جذر تربيعيّ للعدد 4 لأن $4 = -2 \times -2$. ومن ثَم إذا رأيت جذراً تربيعيًّا في مسألتك، هل هذا يعني "دالة الجذر التربيعي الموجبة" التي تقتصر على الجذور الموجبة، أم أنه من المسموح لنا أن نستخدم جذوراً سالبة؟ إذا كنت لا تعرف الإجابة عن هذا السؤال، قد تكون بحاجة لصياغته على شكل فرضية والمضي قدماً. أحياناً قد تكون أفضل إستراتيجية لحل المسائل أن تؤمن بالرياضيات الخيِّرة وتمضي قدماً على الرغم من جميع العقبات.

كيف سيكون شكل الحل؟

اسأل نفسك كيف سيكون شكل الحل؟ قد يبدو هذا سؤالاً سخيفاً، ولكنه ليس كذلك. في تخصصي (توافقية الأعداد) حل المسألة قد يكون عدداً، أو دالة توليدية، أو علاقة ارتدادية، أو علاقة تقاربية، أو خوارزمية، أو صيغة صريحة. وبالاعتماد على طبيعة المسألة، فإن أيًا من هذه يمكن اعتبارها حلاً صحيحاً للمسألة. ومن ثَم اطرح على نفسك السؤال التالي: إذا نجحت في حل هذه المسألة، كيف سيكون شكل الحل؟ هل تطلب منك المسألة أن تجد رقماً، أو برهاناً، أو شكلاً، أو صيغة معينة، أو خوارزمية، أو ماذا؟ كيف يبدو النجاح؟

الفصل الرابع

استكشف المسألة وابحث عن الأنماط

في هذا الفصل سوف نناقش المبادئ الأساسية لاستكشاف المسألة والبحث عن الأنماط، وسوف نقدم التطبيقات في الباب الثاني من الكتاب عندما نبدأ بحل بعض المسائل الرياضية الصعبة. استكشاف المسألة والبحث عن الأنماط هو جوهر الفن في الرياضيات، وهذا ما يقوم به الرياضيون الحقيقيون عندما يقومون بأبحاثهم. إن التفكير في الأنماط الرياضية عادةً ما يستهلك تفكيرنا، ويشكل هاجساً بالنسبة لنا، وفي بعض الأحيان نتوصل إلى أفضل أفكارنا ونحن نقوم بأعمالنا اليومية العادية، إن الوسواس القهري الذي يلازم الشخص بحيث لا يستطيع ترك التفكير في المسألة يشكل شيئاً ثميناً للرياضيين. وكجزء من مقابلة قمت بها سألني أحد المتخصصين في علم النفس: هل تقوم بعدّ البلاط الموجود في أرضية الحمام، وكان جوابي "بالطبع أقوم بذلك، فأنا رياضي".

حدد إستراتيجية "الهجوم الغاشم" للحل

إن الخوارزمية العالمية لحل أي مسألة رياضية وجدت في الماضي أو ستوجد في المستقبل هي ببساطة: اضرب بصفر، وأضف الجواب. وهذا ما يسمى بالحل المخادع. وبشكل جديّ، وعلى الرغم من كل شيء فإن المسار المخادع لحل المسألة الرياضية يتوفر على بعض المزايا ويستحق نقاشاً جادًّا، فأحياناً تشعر بالضياع وفقدان الأمل حيث لا تملك دليلاً لحل المسألة، في حالات كهذه فإن إستراتيجية "الهجوم الغاشم" قد تكون مفيدة.

ما الذي نعنيه بإستراتيجية "الهجوم الغاشم"؟ افرض أن لديك مسألة هندسية صعبة يطلب منك فيها أن تجد قياس زاوية معينة من خلال رسم معطى. الحل باستخدام إستراتيجية "الهجوم الغاشم "يعني أن تحضر ورقة رسم مربعات، وقلم رصاص، ومسطرة، وتقوم بعناية برسم دقيق للشكل الموجود على الورق، ومن ثم تستخدم المنقلة لإيجاد قياس الزاوية. وعندما تقوم بذلك قد تجد أن قياس الزاوية يساوي °45 . ربما تقول "حسناً، ولكن هذا خداع، حيث إنك لم تستخدم النظريات الهندسية لإثبات أن قياس الزاوية يساوي °45 ". هذا صحيح، ولكن لا تنسَ أنه على الرغم من أن ما قمت به ليس حلاً للمسألة، فإنه على الأقل ساعدك على الدخول في عملية استكشاف الحل. إذا قمت باستكشاف المسألة ووجدت أن قياس الزاوية يساوي °45 فقد أحرزت تقدمًا كبيراً نحو الحل. لماذا؟ لأن الزوايا التي قياسها °45 هي زوايا خاصة جدًّا في الهندسة، وهذه المعلومة قد تساعدك على تركيز جهودك على المثلثات من النوع (°45 ، °45 ، °90)، ويمكنك الرجوع إلى كتاب مرجعي للاطلاع على بعض النظريات المتعلقة بالمثلثات من هذا النوع.

من الأمثلة الأخرى على استخدام إستراتيجية "الهجوم الغاشم" كتابة برامج كمبيوتر لحل المسألة باستخدام طحن الأرقام (Number Crunching)، أو حل مسائل الاحتمالات من خلال رمي حجر نرد، أو رسم دالة لإيجاد جذورها، أو عمل نموذج فيزيائي.

تحديد إستراتيجية "الهجوم الغاشم" التي سوف تستخدمها تساعد على تحقيق ثلاثة أهداف. أولاً: تعطيك راحة نفسية عندما تعرف أنك قد تستطيع حل المسألة إذا اضطررت لذلك، ومعرفة هذا سيساعدك على الاسترخاء والضغط على عقلك الهزلي والمبدع. ثانياً: إستراتيجية "الهجوم الغاشم" قد تعطيك جواباً لمسألتك، وعادةً ما يكون من الأسهل أن تحل مسألة تعرف جوابها مسبقاً (انظر إلى المسألة رقم ٢ في الباب الثاني كمثال على هذه الفكرة). معرفة الجواب يساعدك على توجيه استقصاءاتك في الاتجاه الصحيح بحيث لا تضيع الوقت في مسارات قد تكون خاطئة. في مثال الهندسة الذي ذكرناه سابقاً، وعندما تعرف أن قياس الزاوية يساوي °45 ، فإنك لن تضيع وقتك في البحث عن المثلثات من النوع (°30 ، °60 ، °90). وأخيراً فإن إستراتيجية "الهجوم الغاشم" عادةً ما تدلك على الطريق المؤدي إلى الحل السهل والأنيق، حيث تصبح بمثابة خارطة طريق تساعدك على تحديد المسار المختصر الذي ستسلكه. وبعد كل ذلك فإن النتيجة النهائية بعد القليل من المراجعة والتدقيق قد تكون حلاً جميلاً.

احصل على الجواب

أحد أهم المبادئ الأساسية لحل المسألة التي عادةً ما أستخدمها هي "من الأسهل أن تحل مسألة تعرف جوابها مسبقاً". بمجرد معرفتك أن الجواب عن مسألتك هو 0 مثلاً، يجب عليك أن تدرك أن هذه ليست صدفة. أي شيء في الرياضيات يظهر أنه سيؤول إلى الصفر سيكون مهمًا. يمكننا أن ننسى النظر إلى دوال جيب التمام الزائدية (Hyperbolic Cosine Functions)، وليس هناك حاجة لتضييع الوقت في الرجوع إلى المعادلات التفاضلية الجزئية (Partial Differential Equations). إن الشيء الذي نبحث عنه هو شيءٌ أكثر بساطة من ذلك، وعلى الأغلب فإن المسألة تمتلك حلاً بسيطاً وعبقريًا وجميلاً.

افرض أن السفينة التي تركبها ضلت طريقها واستقر بها الحال في أحد الجزر النائية، وافرض أن القبطان طلب منك أن تذهب لتبحث عن بعض الماء، أين يجب عليك أن تبحث؟ هل عليك الصعود إلى المرتفعات؟ هل عليك أن تحاول أن تحفر بئراً؟ والآن افرض أن القبطان أخبرك المعلومة التالية: يوجد بحيرة في هذه الجزيرة. هذه المعلومة بالتأكيد ستغير قواعد اللعبة، فإذا عرفنا أنه يوجد بحيرة في الجزيرة فإنه يمكننا أن نستخدم المنطق، والتفكير، والجغرافيا لمعرفة المكان الذي على الأرجح ستوجد فيه، ولكننا الآن على الأقل نعرف أنها لن توجد بجانب جرف أو على امتداد شاطئ صخري. إذن حاول الحصول على جواب لمسألتك حتى لو كان لزاماً عليك أن تستخدم إستراتيجية "الهجوم الغاشم". إن هذا جزء من عملية الاستقصاء.

استكشف المسألة

من النادر أن تحل المسائل الرياضية الصعبة بطريقة مباشرة، فأنت لا تستطيع أن تحقق النصر على عدو قوي ومحصَّن دون أن تحدد نقاط ضعفه، وإيجاد نقاط الضعف يتطلب استكشافاً، وحل المسألة سيكون واضحاً فقط عندما تعرف كيف سيبدو شكل الحل. إذا كان كل ما تقوم به هو قراءة المسألة ثم النظر مباشرة في نهاية الكتاب لمعرفة الجواب، فإنك لن تُحسّن أبداً من مهاراتك في حل المسألة، ويجب عليك أن تعرف معنى المعاناة، حيث يجب عليك أن تعاني في حل المسألة وتتحمل المصاعب حتى تُقدّر وتتعلم من الحل عندما تراه، وهذا جزء من عملية التعلم. استكشاف المسألة الرياضية هو أن تدخل في معركة مع مسألتك، وهذا ليس سهلاً، ولكن المكافأة التي ستحصل عليها تستحق ذلك.

كيف يمكن لك أن تبدأ بعملية استكشاف المسألة؟ نحن لا نستطيع اختزال عملية الاستكشاف إلى مجموعة بسيطة من التعليمات لأن كل مسألة متفردة بنفسها، ولكن يمكن لنا أن نضع مجموعة من المبادئ العامة التي يمكن لنا أن نتبعها.

النقطة الجيدة التي يمكن أن تبدأ عندها استكشاف المسألة هي النظر إلى الحالات الصغيرة، والحالات الخاصة، والحالات المتطرفة أو القصوى. إذا طلبت منك المسألة أن تجد مجموع 1000 حد، ابدأ بإيجاد مجموع حدين أو ثلاثة حدود، بَسِّط النتائج وانظر ماذا يحدث، هل ترى نمطاً ما بدأ يظهر؟

أحياناً يمكن لك أن تعوض أعداداً صغيرة مثل 1، 2، 3 في مسألتك ثم ترى ماذا سيحدث بعد ذلك. إذا كانت مسألتك تتضمن متغيرات كبيرة مثل $n = 1000$، استكشف حالة أصغر مثل $n = 10$. وعادةً سيظهر لك النمط الذي تستطيع تعميمه على الحالات الأكبر. وسأذكر لك هنا بعض التلميحات التي عليك النظر إليها عند اختيار الحالات الصغيرة، حاول أن تختار عدداً صغيراً له نفس الخصائص الرياضية التي يمتلكها العدد الأكبر. على سبيل المثال إذا كانت $n = 425$، حاول أن تستكشف الحالة $n = 5$. لماذا؟ لأن كلا العددين 425، 5 فرديٌّ، وكلاهما من مضاعفات العدد 5. إذا تضمن نص المسألة عدداً فرديًّا أوليًّا كبيراً مثل $p = 35993$ حاول أن تستخدم عدداً فرديًّا أوليًّا صغيراً مثل $p = 3$.

أيضاً حاول أن تنظر إلى الحالات الخاصة، ماذا يحدث إذا كانت $x = 0$ أو $x = 1$. الصفر والواحد أعداد خاصة ومهمة في الرياضيات، وعليك دائماً أن تسأل نفسك ماذا يحدث عندما تكون المتغيرات الرياضية تساوي 0 أو 1. حاول أن تلجأ إلى أنواع خاصة من الأعداد، فأحياناً الأعداد الخاصة يكون لها ميزات خاصة لها علاقة بمسألتك. انظر ماذا يحدث عندما يكون المجهول في المسألة عدداً أوليًّا، ماذا يحدث إذا استخدمت أعداداً زوجية أو فردية.

المنحى الآخر الذي قد نلجأ إليه هو النظر إلى الحالات المتطرفة. ماذا يحدث إذا كان جزء معين من مسألتك كبيراً جدًّا أو صغيراً جدًّا؟ ماذا يحدث إذا كان أحد المتغيرات يؤول إلى اللانهاية الموجبة أو السالبة؟ العديد من مسائل التوافيق لها حلول معقدة وصعبة عندما تكون قيم المعلمة (n مثلاً) صغيرة، ولكنها تصبح أكثر بساطة عندما تكون n كبيرة.

سيكون لديك بصيرة كبيرة ورؤى ثاقبة تتعلق بكيفية حل مسألتك عندما تلجأ إلى النظر إلى الحالات الصغيرة، والحالات الخاصة، والحالات المتطرفة.

"القيام ببعض الحسابات باستخدام الأرقام" هي من الإستراتيجيات المهمة الأخرى التي نستخدمها لاستكشاف المسألة، وهذه الإستراتيجية مفيدة بشكل خاص في المسائل المتعلقة بنظرية الأعداد والجبر.

بالنسبة للمسائل المتعلقة بنظرية الأعداد، فإن الحسابات التجريبية – باستخدام برنامج كمبيوتر متخصص بالجداول مثلاً – قد تساعدك في التوصل إلى بعض الحلول العددية لمسألتك. وبمجرد أن يتوفر لديك عدد من الحلول، يمكنك البحث عن الأنماط في هذه الحلول. افرض على سبيل المثال أن الحلول التي توصلت إليها كانت أعداداً مربعة مثل 1، 4، 9، 16، عليك مباشرةً أن تتوقع أن تكون جميع الحلول هي أعداد مربعة، وهذه الملاحظة ستصبح الأساس الذي ستبني عليه تخميناً معيناً، ومن ثَم يمكنك بعد ذلك أن تركز جهودك على إثبات هذا التخمين.

بالنسبة للمسائل المتعلقة بالجبر، قد تشعر بالارتباك عند التعامل مع عدد كبير من المتغيرات مثل x، y، z. لذا فإن تعويض بعض الأعداد الفعلية في تعبير معين قد يساعدك على فهم طبيعته وشكله، وقد تجمع بعض المقترحات عن كيفية عمله. افرض أن لديك التعبير المعقد $f(x,y,z)=0$، وأنك لا تعرف كيف تبدأ استكشاف هذا التعبير جبريًا. يمكن لك أن تقوم بتعويض قيم عددية لكل من x، y، z، ولنفرض أنك وبعد القليل من الحسابات وجدت أنه عندما يكون $x+y+z=0$، مثل $-5+2+3=0$ فإن $f(x,y,z)=0$ أو $f(-5,2,3)=0$. في هذه الحالة يجب أن تتوقع أن $(x+y+z)$ هو أحد عوامل $f(x,y,z)$، وهذا يعني أنه عليك أن تحاول أن تكتب التعبير $f(x,y,z)$ كحاصل ضرب عدد من العوامل أحدها $(x+y+z)$.

إن عملية الاستكشاف تتعلق بالالتفاف حول المسألة للتعرف على طبيعتها وسبر أغوارها من خلال تجربة العديد من الأشياء المختلفة. قم بعمل تخمينات، عوِّض بعض الأعداد وقم ببعض الحسابات، اتَّبع حدسك ومشاعرك، وابحث عن الأنماط في البيانات.

إن عملية الاستكشاف تساعدك على الرجوع للخلف والنظر بوضوح إلى الصورة الكلية. عندما تعمل على مسألة معينة، اسأل نفسك إذا كان يوجد هناك طرائق أخرى للنظر إلى المسألة. حاول أن تغير من انطباعاتك، وانظر للمسألة من جوانب مختلفة، فمسألة الجبر على سبيل المثال قد يكون لها ترجمة هندسية أو طوبولوجية. افرض أنه طلب منك أن تجد جميع الأزواج المرتبة (x, y) التي تمثل حلاً لنظام المعادلات غير الخطية التالي:

$$\begin{cases} 2x^2 - 6xy + 2y^2 + 43x + 43y - 174 = 0 \\ x^2 + y^2 + 5x + 5y - 30 = 0 \end{cases}$$

إذا نظرنا لهذه المسألة من زاوية جبرية، فإنها تبدو مرعبة. ولكن إذا نظرنا إليها كمسألة هندسية يمكن لك أن تدرك بسهولة أن المعادلة الأولى تمثل معادلة قطع زائد، بينما المعادلة الثانية تمثل معادلة دائرة. الآن الحل أصبح واضحاً من الناحية المفاهيمية على الأقل. منحى "الهجوم الغاشم" للحل يتمثل ببساطة في رسم القطع الزائد والدائرة وإيجاد نقاط التقاطع. كما أن معرفة أن هذه المعادلات تمثل قطعاً زائداً ودائرة يخبرنا أنه يوجد على الأكثر أربعة حلول (x, y)، وذلك لأنه سيكون لدينا على الأكثر أربع نقاط تقاطع بين القطع الزائد والدائرة في المستوى .

جورج بوليا نصح طلابه قائلاً: إذا لم تستطع حل المسألة المعطاة لك، حاول في البداية أن تحل مسألة أسهل، حيث إن حل المسألة الأسهل قد يوفر لك بعض الأفكار التي قد تساعدك على حل المسألة الأصعب. يمكن لك أن تجعل مسألتك أكثر سهولة من خلال العديد من الطرائق، حيث يمكنك أن تغير حجم أو مقياس المسألة، أو أن تستخدم عدداً أقل من المعادلات أو المتغيرات، أو أن تستخدم معاملات أصغر، أو أن تغير قيود المسألة.

أحد الإستراتيجيات المهمة في حل المسألة التي غالباً ما تكون مفيدة هي إستراتيجية "فرق تسد". تقوم هذه الإستراتيجية على تقسيم المسألة إلى جزأين أو أكثر من الحالات المنفصلة والمختلفة، ثم بعد ذلك تقوم بحل كل جزء من هذه الأجزاء بشكل منفصل. يوجد العديد من الطرائق للقيام بذلك، حيث يمكن لك أن تأخذ بعين الاعتبار الأعداد الزوجية والفردية بشكل منفصل، أو أن تأخذ الأعداد الأولية والأعداد المركبة (Composite Numbers) كحالات مختلفة. فيما يتعلق بالمسائل الهندسية يمكن لك أن تقسم المسألة إلى أجزاء من خلال الأخذ بعين الاعتبار الزوايا الحادة، والزوايا المنفرجة، والزوايا القائمة. حاول

أن تقسم المسألة إلى مجموعة من الحالات المنفصلة والمختلفة بحيث تغطي جميع الاحتمالات. قم بفحص كل حالة بشكل منفصل وحل المسألة من خلال التعامل مع كل حالة من الحالات.

ابحث عن الأنماط

كتابة الملاحظات المفيدة أو الوصول للأنماط هي أحد النواتج المهمة التي نحصل عليها من عملية استكشاف المسألة. الأنماط هي كلمة السر لحل المسائل الرياضية الصعبة، حتى إن كيث ديفلين (Keith Devlin) عرف الرياضيات بأنها "علم الأنماط". إذا استطعت رؤية النمط في بياناتك، فأنت على الأغلب تسير في الطريق الصحيح، وأصبحت على وشك الوصول لحل لمسألتك.

ما هو نوع الأنماط الذي عليك أن تبحث عنه؟ عندما تقوم باستكشاف مسألة رياضيات من خلال تعويض أعداد في معادلات وتبويب البيانات ستظهر لك أنواعاً خاصة من الأنماط ذات الصلة بالرياضيات. ابحث عن الأنماط في الكميات الرياضية المهمة مثل:

- الأعداد الأولية (أو الأعداد المركبة)
- الأعداد الزوجية (أو الفردية)
- قوى العدد 2 (أو 3، إلخ)
- الأعداد الصحيحة (أو النسبية، إلخ)
- 0 أو 1
- الثوابت الرياضية مثل π، e، γ

هل تظهر البيانات أي سلوكاً دوريًّا (Periodic behavior)؟ خذ بعين الاعتبار متتالية الأعداد التالية:

$$7, 23, 4, 2, 0, 6, 9, 13, 8, 0, 1, 1, 7, 19, 0, 7, 7, 7, 9, 0, \ldots$$

هل ترى نمطاً ما في هذه الأعداد؟ أحد الأنماط التي يمكن أن تلاحظها تتمثل في أن كل عدد خامس يساوي صفراً. هذه الملاحظة قد تكون المفتاح لحل المسألة. يجب عليك أن تقوم باستقصاء إذا ما كان بالفعل كل عدد خامس يساوي صفراً، وإذا كان كذلك، لماذا؟

تعلَّم أن تتعرف على متتاليات الأعداد المهمة مثل تلك التي سنذكرها بعد قليل، حيث إن هذه المتتاليات كثيراً ما تظهر في المسائل الرياضية، وإذا تمكنت من التعرف عليها وتمييزها فإنك بالتأكيد ستكون قادراً على الوصول إلى نمطٍ مهمٍّ.

- أعداد أولية: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$
- أرقام فيبوناشي (Fibonacci Numbers) : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$
- قوى العدد 2 : $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, \ldots$
- المربعات الكاملة: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots$
- المضروب (Factorials) : $1, 2, 6, , 24, 120, 720, 5040, 40320, \ldots$
- أعداد كاتلان (Catalan Numbers) : $1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots$

إذا عملت على متتالية عددية ولم تستطع أن تصل إلى نمطٍ ما، فابحث عنها في دليل سلون لمتتاليات الأعداد الصحيحة (Sloane's Handbook of Integer Sequences)، تتوفر نسخة إلكترونية من هذا الدليل على الرابط: /https://ocis.org وسيقوم هذا الدليل بإخبارك ماذا يعرف الرياضيون عن متتاليتك العددية.

مثلث باسكال (Pascal's Triangle) يُعدّ أحد الأنماط المهمة في الرياضيات (انظر إلى المسألة 9 في الباب الثاني)

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

باستثناء العدد 1 فإن كل عدد في مثلث باسكال يساوي مجموع العددين اللذين فوقه مباشرةً، فمثلاً لاحظ أن $6 + 4 = 10$. إذا كنت تحل مسألة تركيبات (Combinatorics) ، يجب عليك دائماً البحث عن أرقامك في مثلث باسكال. لماذا؟ لأننا نعرف من الخبرة ومن النظرية الرياضية أن الجواب عن مسألة

التركيبات دائماً ما سيظهر في مثلث باسكال عندما يكون الجواب عدداً صحيحاً موجباً (ومن البديهي أن كل عدد صحيح موجب موجود في مثلث باسكال، ولكن من المهم أيضاً أن تعرف متى وكيف يمكن لأرقامك أن تحقق في الوجود في مثلث باسكال). يعرف الرياضيون أشياء كثيرة عن الأعداد في مثلث باسكال، ويوجد الآلاف من النظريات المفيدة والعلاقات التي قد تساعدك في حل مسألتك.

احترس من الأنماط الخاطئة

البحث عن الأنماط وإيجادها هي نقطة مركزية في عملية حل المسألة، فمعظم الأحيان عندما نعتقد أننا رأينا نمطاً يجب علينا التأكد من صحة هذا النمط واستمراريته، لذلك علينا إعادة صياغة الأنماط على شكل تخمينات ومن ثم محاولة إثبات هذه التخمينات. ومع ذلك فإننا من حين إلى آخر نعتقد أننا نرى نمطاً غير موجود فعليًّا، وهذه هي الأنماط الخاطئة. إن الدماغ البشري جيد جدًّا في إدراك الأنماط لدرجة أنه غالباً ما يرى الأنماط حيث لا توجد.

وهنا نذكر مثالاً مشهوراً على النمط الخاطئ. انظر إلى كثيرة الحدود $f(n) = n^2 + n + 41$. كثيرة الحدود هذه تعطينا أعداداً أولية عندما $n = 1,2,3,...,39$ ، فمثلاً $f(5) = 71$ الذي هو عدد أوليّ، ومن ثَم وبناءً على البيانات التي حصلنا عليها من أول 39 عدداً، يمكن أن نقفز إلى التخمين التالي: " $f(n)$ عدد أوليّ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n "، ولكن هذا التخمين خاطئ، لأنه عندما $n = 41$ نحصل على أن $f(41) = 41^2 + 41 + 41$ ، وهذا العدد يقبل القسمة على 41 ، ومن ثَم فإنه عدداً مركباً وليس أوليًّا ($f(40)$ هو أيضاً عدداً مركباً).

امضِ قُدماً وابحث عن الأنماط. معظم الأحيان أنماطك ستكون حقيقية، ولكن تذكر أنه يجب عليك دائماً أن تثبت ما تلاحظه من أنماط مستخدماً حججاً رياضية سليمة.

الفصل الخامس

صياغة التخمينات

عندما يقوم الرياضيون بكتابة الأبحاث والاستقصاء عن المشكلات، فإنهم يبحثون عن الأنماط ويقومون بصياغة التخمينات. التخمين هو جملة رياضية نعتقد أنها صحيحة ولكنها غير مثبتة، والتخمينات الجيدة تسبق براهينها. والتخمين ليس نظرية، حيث إن النظرية هي جملة رياضية تمتلك إثباتاً أو برهاناً، في حين أن التخمين هو جملة رياضية في طريقها لأن تصبح نظرية، وبمجرد أن تقوم بإثبات تخمينك يصبح نظرية.

عندما تقوم بفحص بياناتك في أثناء مرحلة الاستكشاف، ابحث عن الأنماط، وعندما تجد نمطاً ما قم بوصفه بعناية، وقم بكتابته على ورقة، وقم بصياغته على شكل جملة رياضية، وعند هذه اللحظة يمكننا القول إنك وصلت إلى تخمينك. قد يكون من المفيد أن تكتب تخمينك في البداية بلغة سهلة وبسيطة، كما لو أنك تريد أن تشرحه لجدتك، وبعد ذلك يمكنك إعادة كتابة تخمينك باستخدام اللغة الرياضية التخصصية لتجعله أكثر دقة. دعونا ننظر إلى مثال بسيط.

ما هو مجموع أول n من الأعداد الفردية؟ في البداية دعونا ننظر إلى بعض الحالات الصغيرة:

$$1 = 1$$
$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

لاحظ أن شيئاً ممتعاً يحدث هنا، الأعداد على الجهة اليمنى من إشارة المساواة تظهر على أنها مربعات كاملة: $1 = 1^2$، $4 = 2^2$، $9 = 3^2$، $16 = 4^2$، $25 = 5^2$. هل هذا دائماً صحيح؟ هل سيستمر

هذا النمط؟ لا أعرف؟ (حقيقيةً أنا أعرف، ولكن دعنا نتظاهر بأني لا أعرف). دعنا نصيغ النمط الذي شاهدناه على شكل تخمين. يمكننا أن نعبر عن هذا التخمين باللغة السهلة والبسيطة كما يلي:

تخمين: مجموع أول n من الأعداد الفردية يساوي n^2

دعنا نفحص هذا التخمين. هل مجموع أول 8 أعداد فردية يساوي 8^2 أو 64. نعم هذا صحيح حيث إن:

$$1+3+5+7+9+11+13+15=64$$

بالطبع مهما كان عدد الأمثلة الصحيحة التي تجربها فإنها لن تكون كافية لإثبات صحة جملة رياضية، وفي المقابل فإن مثالاً واحداً خاطئاً يكفي لإثبات خطأ الجملة.

نحن جاهزون الآن لإعادة كتابة تخميننا باستخدام اللغة الرياضية الدقيقة، والسبب في قيامنا بذلك أنه سيسهل علينا إثبات (أو دحض) التخمين. في الحقيقة سنقوم بإثبات هذا التخمين في الفصل القادم، وفي ذلك الوقت فإن تخميننا سيكبر وينمو ليصبح نظرية سعيدة.

العدد الفردي ذو الترتيب k يمكن التعبير عنه على شكل $2k-1$. حاول أن تجرب ذلك: العدد الفردي الخامس هو $2(5)-1=10-1=9$. ومن ثَم فإن أول n من الأعداد الفردية يمكن التعبير عنها على الشكل:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

يمكننا الآن أن نعبر عن تخميننا بشكل أكثر دقة على الصورة:

تخمين: لأي عدد صحيح موجب n ،

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

والآن أصبح لدينا جملة رياضية دقيقة يمكن لنا أن نحاول إثبات صحتها. ولأننا كتبنا التخمين كجملة رياضية باستخدام لغة الرياضيات، يمكننا الاستعانة بكل الآليات الرياضية الحديثة لتساعدنا في إثبات هذه الجملة.

هل فهمت هذه الجملة الرياضية؟ إذا لم تفهمها يمكن لك أن تلجأ إلى إستراتيجيتنا القديمة في الاستكشاف من خلال تعويض مجموعة من الأعداد في المعادلة:

$$\sum_{k=1}^{3}\left(2k-1\right)=\left(2.1-1\right)+\left(2.2-1\right)+\left(2.3-1\right)=1+3+5=9$$

بعد أن تقوم باستكشاف المسألة، وتحديد الأنماط، وصياغة التخمينات، يمكنك أن تنتقل للخطوة التالية وهي إثبات صحة تخمينك. وسوف نناقش هذه الخطوة في الفصل القادم.

الفصل السادس

أثبت صحة تخميناتك وحل المسألة

بعد أن تستكشف المسألة، وتحدد الأنماط، وتضع التخمينات المتعلقة بهذه الأنماط، فإن الخطوة اللاحقة في عملية حل المسألة هي إثبات صحة تخميناتك. وعندما تكون قادراً على إثبات صحة تخميناتك باستخدام حجج وأدلة رياضية سليمة، فإنك ستكون قادراً على حل المسألة.

إنَّ أنواع الجمل الرياضية التي نسعى لإثبات صحتها عادةً ما تتميز ببعض النكهات. أولاً يوجد لدينا الجمل من الشكل " إذا A فإن B "، وعادةً ما نطلق تسمية "الاقتضاء" (Implication) على هذا النوع من الجمل. في الهندسة على سبيل المثال لدينا نظرية فيثاغورث المشهورة: إذا كانت أحد زوايا المثلث قائمة، فإن مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين. النوع الثاني من الجمل يسمى جمل الوجود (Existence)، وفي هذه الحالة نريد أن نثبت أن مفردة رياضية تمتلك مجموعة من الخصائص المهمة موجودة بالفعل. وفي بعض الأحيان إذا كانت المفردة موجودة بالفعل قد نحتاج أن نثبت أنها وحيدة (Unique) (يوجد منها واحدة فقط)، ويطلق على هذا النوع من البراهين مسمى "الوحدانية" (Uniqueness).

كيف نثبت صحة تخمين رياضي؟ يوجد العديد من الطرائق المختلفة في الرياضيات للقيام بذلك، وسنقوم بشكل مختصر بتوضيح أهم هذه الطرائق، علماً أن الطرائق التي سنناقشها هنا ليست شاملة، حيث إن كل فرع من فروع الرياضيات يمتلك طرائق خاصة في الإثبات. على سبيل المثال في نظرية الأعداد يمكننا أحياناً أن نثبت أن المعادلة الديوفنتية المعطاة (معادلة جميع حلولها يجب أن تكون أعداداً صحيحة) لا يمكن أن يكون حلها عدداً صحيحاً موجباً باستخدام طريقة معينة من البرهان تسمى طريقة التناقص اللانهائية لفيرمات (Fermat's Method of Infinite Descent)، وتعتمد

طريقة فيرمات على خاصية مهمة للأعداد الصحيحة الموجبة من الجيد أن نعرفها تسمى مبدأ الترتيب الحسن (Well Ordering Principle) : كل مجموعة غير خالية من الأعداد الصحيحة تحتوي على العنصر الأصغر (Least Element) .

وفيما يلي أهم الطرائق الرياضية في البرهان، وسنستخدم بعضًا منها في الباب الثاني من الكتاب عندما نحل بعض المسائل.

البرهان المباشر

طريقة البرهان المباشر (Direct Proof) طريقة مباشرة وواضحة جدًا، مثلاً إذا أردنا أن نثبت أن:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

فكل ما علينا فعله هو أن نضرب المقدارين في الطرف الأيمن من المعادلة، ونبين أن حاصل الضرب يساوي الطرف الأيسر، المشكلة هنا أن البراهين المباشرة ليست متوفرة لنا دائماً، فالحياة عادةً ليست بهذه البساطة.

البرهان بالتناقض

يستخدم البرهان بالتناقض (Proof By Contradiction) على نطاق واسع في الرياضيات الحديثة، ويوجد لهذا النوع من البرهان اسم لاتيني شهير (Reductio and Absurdum) الذي يعني "البرهان غير المباشر". ربما تكون قد رأيت هذه الطريقة تستخدم في إثبات أن $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي. افرض أننا نريد أن نثبت أن جملة ما A تقتضي جملة أخرى B . يعبر الرياضيون عن ذلك بالصورة " A تؤدي إلى B " وباستخدام الرموز يمكن أن يعبروا عنها بالصورة $A \Rightarrow B$. وهذا يعني " إذا كانت A صحيحة، فإن B صحيحة". لكي نثبت أن A تؤدي إلى B باستخدام طريقة البرهان بالتناقض، نفرض أن A صحيحة و B خاطئة، ثم بعد ذلك وباستخدام جدالٍ ذكيٍّ نصل إلى تناقض من نوع ما. ولهذا إذا كانت A صحيحة، فإن B لا يمكن أن تكون خاطئة، ومن ثَم فإن الجملة B يجب أن تكون صحيحة.

دعونا نستخدم طريقة البرهان بالتناقض لنثبت أنه لا يوجد عدد زوجي أولي أكبر من 2 . افرض من أجل التناقض أن p عدد زوجيّ أوليّ أكبر من 2 . بما أن p عدد زوجيّ، فإنه يمكننا أن نكتبها على الشكل $p = 2n$ ، وبما أن p أكبر من 2 ، فإن n عدد صحيح موجب أكبر من 1 . ولكن عند ذلك يمكننا أن نستنتج أن p تقبل القسمة على كل من 2 ، و n . وهذا يشكل تناقضاً، حيث إن أي عدد أكبر من 2 له اثنان أو أكثر من العوامل هو عدد مركب (Composite) ، وهذا يناقض فرضنا بأن p عدد أوليّ. ومن ثَم فإنه لا يوجد عدد زوجيّ أوليّ أكبر من 2 .

البرهان بالمكافئ العكسي (Contrapositive)

من المعروف في المنطق أن الجملة " A تؤدي إلى B " تكافئ منطقيًّا الجملة "نفي B يؤدي إلى نفي A ". دعونا نأخذ مثالاً بسيطاً من الحياة اليومية، إن الجملة " إذا نزل علي المطر، أصبح مبللاً" منطقيًّا هي الجملة "إذا لم أصبح مبللاً، فإن المطر لم ينزل علي". أحياناً يكون من الأسهل التعامل مع جملة رياضية من خلال النظر إلى جملة المكافئ العكسي. باستخدام هذه الطريقة يمكن لنا أن نثبت الجملة " A تؤدي إلى B " من خلال إثبات الجملة "نفي B يؤدي إلى نفي A ".

إذا كان لدينا مثلثاً أطوال أضلاعه a ، b ، c بحيث $a \le b \le c$ ، هل نستطيع أن نثبت أنه إذا كانت c^2 لا تساوي $a^2 + b^2$ ، فإن المثلث ليس قائم الزاوية. بالطبع نستطيع، لأن جملة المكافئ العكسي للجملة السابقة ليست سوى نظرية فيثاغورث التي نعرف مسبقاً أنها صحيحة: إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن $c^2 = a^2 + b^2$ ، حيث c طول الوتر (الضلع المقابل للزاوية القائمة).

العمل للخلف

لكي نثبت أن " A تؤدي إلى B "، افرض أن A صحيحة و B صحيحة. اعمل للخلف من خلال الانتقال من B إلى A . إذا كانت الخطوات الرياضية قابلة للعكس بشكل وحيد، فيمكن لك أن تتبع هذه الخطوات من خلال السير بالاتجاه العكسي من B إلى A .

البرهان من خلال البناء

إذا كانت الجملة B تحتوي على كلمات مثل "يوجد" أو "هناك"، فإنه لكي نثبت أن "A تؤدي إلى B"، افرض في البداية أن A صحيحة، ثم قم ببناء كائن من النوع B يعتمد على الفرض بأن A صحيحة.

دعونا نبين من خلال البناء أنه إذا كان p، و q أي عددين نسبيين بحيث $p < q$، فإنه يوجد عدد نسبي آخر r يقع بين p و q. يمكن لنا أن نستخدم البناء لإثبات هذه الجملة من خلال اختيار:

$$r = \frac{p+q}{2}$$

برهان الوحدانية

افرض أن B جملة تتعلق بالوحدانية (Uniqueness) (مثلاً: يوجد عدد وحيد......). لكي نثبت أن "A تؤدي إلى B"، افرض في البداية أن A صحيحة، ثم افرض وجود كائنين مختلفين من النوع B، ثم بين أن هذا الفرض يؤدي إلى تناقض.

لكل عدد من الأعداد الحقيقية غير الصفرية يوجد معكوس ضربي، على سبيل المثال المعكوس الضربي للعدد $x = 5$ هو العدد $y = 1/5$، وذلك لأن $xy = 1$، والعدد 1 هو العنصر المحايد. دعنا نثبت أن المعكوس الضربي للعدد الحقيقي في حالة وجوده فإنه وحيد. افرض أن العدد الحقيقي x له معكوس ضربي y. من خلال تعريف المعكوس الضربي نعرف أن:

$$xy = yx = 1$$

والآن افرض أن x له معكوس ضربي آخر z. إذاً:

$$xz = zx = 1$$

والآن وباستخدام قانون التوزيع في الضرب، نحصل على:

$$z = 1.z = (yx)z = yxz = y(xz) = y.1 = y$$

ومن ثَم فإن $z = y$. إذن المعكوس الضربي في حالة وجوده فإنه وحيد.

البرهان باستخدام المثال المناقض

بعض الجمل الرياضية يمكن إثباتها (أو دحضها) ببساطة من خلال إيجاد مثال مناقض (Counterexample) . وفيما يلي نقدم مثالاً بسيطاً. افرض أن لديك التخمين التالي: جميع الأعداد الأولية هي أعداد فردية. بالنظر إلى الأعداد الأولية:

$$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\ldots$$

يبدو أن هذا التخمين صحيح، حيث تظهر جميع الأعداد الأولية بأنها أعداد فردية، ولكنه تخمين خاطئ، وكل ما نحتاجه لإثبات ذلك هو البحث عن مثال مناقض واحد، وهذا المثال هو العدد 2 حيث إنه عدد زوجي وأولي، وفي الحقيقة فإن العدد 2 هو العدد الزوجي الأولي الوحيد.

الطريقة الأخيرة في البرهان الذي سنتطرق إليه تستخدم بشكل واسع في الرياضيات، وخصوصاً في نظرية الأعداد والتوافقية. من المهم جداً أن نقوم بإعطاء مثال على إثبات التخمين الذي مرَّ معنا في الفصل الخامس، أما الطرائق الأخرى للبرهان فستظهر معنا في الباب الثاني من الكتاب.

الاستقراء الرياضي

الاستقراء الرياضي (Mathematical Induction) يبدو غريباً عندما تراه للمرة الأولى. البرهان باستخدام الاستقراء الرياضي يشبه لعبة أحجار الدومينو. تخيل أن لديك مجموعة من أحجار الدومينو مرتبة بشكل خطي في صف، إذا سقط الحجر الذي ترتيبه n واصطدم بالحجر التالي، فإن الحجر الذي ترتيبه $n+1$ سوف يسقط أيضاً. لكن ولكي تبدأ هذه العملية يجب عليك أولاً أن تدفع أحد الأحجار، وإذا أردت أن تسقط جميع الأحجار يجب عليك أن تدفع الحجر الأول، وبعد ذلك سيسقط الحجر الثاني، والثالث، وهكذا حتى تسقط جميع الأحجار.

إن إعطاء مثال هو أفضل طريقة لتعلم الاستقراء الرياضي؛ لذا دعنا نستخدم هذه الطريقة في البرهان لإثبات التخمين الذي مرَّ معنا في الفصل الخامس. وسأقوم بتسميته "نظرية" لأننا سوف نقوم بنجاح بإثبات أنه جملة صحيحة.

نظرية: لأي عدد صحيح موجب n ،

$$\sum_{k=1}^{n}\left(2k-1\right)=n^2$$

البرهان:

دعنا نفترض أن $f(n)=\sum_{k=1}^{n}\left(2k-1\right)$. ما نريد إثباته هو أن $f(n)=n^2$. في البداية، ومثل دفع الحجر الأول من أحجار الدومينو، يجب علينا أن نبين أن $f(1)=1^2$

$$f(1)=\sum_{k=1}^{1}\left(2k-1\right)=\left(2.1-1\right)=2-1=1=1^2$$

ومن ثَم فإن الخطوة الأولى التي نسميها "أساس الاستقراء" صحيحة. والآن نأتي إلى الجزء الذكي. نريد أن نبين أنه إذا قمنا بدفع الحجر الذي ترتيبه n ، فإنه سيسقط الحجر الذي ترتيبه $n+1$ ، وهذا يعني أنه علينا أن نبين أنه إذا كانت $f(n)$ صحيحة، فإن $f(n+1)$ صحيحة. وهذا يعني أنه يمكننا أن نكتب معادلة $f(n+1)$ مفترضين أن $f(n)=n^2$ ، ونرى إذا ما كنا قادرين على إثبات أن $f(n+1)=\left(n+1\right)^2$. حسناً، دعنا نبدأ:

$$\begin{aligned}f(n+1)&=\sum_{k=1}^{n+1}\left(2k-1\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(2k-1\right)+\left(2\left(n+1\right)-1\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(2k-1\right)+2n+1\\&=n^2+2n+1\\&=(n+1)(n+1)\\&=(n+1)^2\end{aligned}$$

لاحظ أننا استخدمنا الفرض $\sum_{k=1}^{n}\left(2k-1\right)=n^2$ لإثبات أن $\sum_{k=1}^{n+1}\left(2k-1\right)=(n+1)^2$. والآن بما أن $f(1)=1^2$ ، وبما أن صحة $f(n)$ تقتضي صحة $f(n+1)$ ، نستطيع القول إن $f(2)=2^2$. وبما أن $f(2)=2^2$ فإن هذا يقتضي أن $f(3)=3^2$. وهكذا حتى تسقط جميع أحجار الدومينو.

التكتيكات الرياضية

بعد أن حددت الأنماط المهمة، وقمت بصياغة التخمينات وإثباتها، تحتاج الآن أن تحل المسألة النهائية، وهذا يقتضي وضع جميع أجزاء الأحجية معاً. عادةً حتى تكون ناجحاً سوف تحتاج أن تستخدم تكتيكات (Tactics) أو خدع رياضية خاصة لكي تحل المسألة. من الأمثلة على التكتيكات الرياضية تحليل كثيرات الحدود، والضرب بمرافق العدد المركب، أو فحص الحالات الزوجية والفردية بشكل منفصل. يوجد عدد كبير جدًا من التكتيكات الرياضية بحيث يصعب علينا مناقشتها جميعها، والطريقة الأفضل لتعلم التكتيكات هو حل عدد من المسائل الرياضية، وسوف نرى العديد من التطبيقات الواقعية للتكتيكات عندما نحل مسائل رياضية في الباب الثاني . الملحق (C) يزودنا بقائمة مرجعية للعديد من التكتيكات الرياضية، ويمكن لك أن تستخدم الملحق (C) في كل مرة تحل مسألة رياضية، حيث إنه قد يزودك بتكتيك معين يساعدك في حل المسألة.

الفصل السابع

تحقق من حلك

المسار الرياضي المنضبط يحتم عليك دائماً أن تتحقق من حلك. في بعض الحالات قد ترتكب خطأً ما، وفي حالات أخرى قد لا ترتكب أي نوع من الأخطاء ولكنك وصلت إلى حلول غريبة لا تحقق شروط المسألة.

من الناحية الفنية، العبارة "تحقق من حلك" تتكون من شقين: تحقق من جوابك، وتحقق من حلك. إذا طلبت منك المسألة جواباً ما -عدد مثلاً- يجب عليك أن تتحقق أن هذا العدد صحيح ويؤدي إلى حل المسألة. بالإضافة لذلك وبما أن الرياضيين يريدون أن يروا حلولاً متسلسلة ومنطقية للمسألة، فالأكثر أهمية هو أن يكون حلك صحيحاً. التحقق من صحة حلك يعني أن عليك أن تتحقق من خطواتك المنطقية، ومن الحجج التي قدمتها، ومن المنطق الذي سرت عليه.

كيف يمكن لك أن تتحقق من حلك؟ يوجد العديد من الطرائق للقيام بذلك. أقوى هذه الطرائق هي أن تبين أن المنطق الذي استخدمته والتبريرات التي سقتها لا يوجد بها أخطاء، وسوف تحتاج إلى العودة من البداية ومراجعة خطواتك المنطقية والنظر إلى جميع التفصيلات الصغيرة، وقد يكون من الجيد أن تعرض عملك على أحد الرياضيين لمراجعته والتأكيد على صحته.

المسار الثاني للتحقق من صحة الحل هي الاختبار العددي (Numerical Testing). لا يوجد أي كمية من الأمثلة العددية تكفي لإثبات نظرية ما، ولكن مثال مناقض وحيد سيكون كافياً لنفي أي جملة رياضية مفترضة. الاختبار العددي (تعويض أعداد في المعادلة أو الصيغة) يمكن له أن يساعدك بشكل كبير على فهم معنى النظرية.

المسار الثالث للتحقق من الحل هو أن تنظر إلى الاتساق الداخلي (Internal Consistency) للحل أو النظرية. هذا المسار يُعدّ "مقياس للملائمة"، هل يتلاءم حلك مع الإطار الموجود للرياضيات الحديثة؟ هل النتيجة التي توصلت إليها تتعارض مع نظرية رياضية أخرى مثبت صحتها؟ أم أنها تتلاءم جيدًا وتنسجم مع النتائج الأخرى المعروفة؟ إذا قمت بإثبات نظرية تتعارض مع النظرية الأساسية في الحساب (وحدانية التحليل الأولي)، فإن نظريتك بالتأكيد خاطئة، حتى لو كنت لا تعرف السبب الذي يجعلها كذلك، وذلك لأن النظرية الأساسية في الحساب تم إثباتها في العديد من المرات، من خلال العديد من الرياضيين، وباستخدام طرائق مختلفة ومتنوعة. إذا كانت نتيجتك صحيحة فلا بدَّ أن تتسق داخليًّا مع النظريات الرياضية الموجودة.

دعنا ننظر إلى مسألة توضح لنا لماذا علينا دائماً أن نتحقق من حلنا. أوجد الحلول المختلفة للمعادلة:

$$\left|x-|2x+1|\right|=4$$

لأي عدد حقيقي x، تعرف القيمة المطلقة للعد x كما يلي:

$$|x|=\begin{cases} x & if\, x\geq 0 \\ -x & if\, x<0 \end{cases}$$

يمكن لنا أن نستخدم هذا التعريف لتبسيط المعادلة $\left|x-|2x+1|\right|=4$

المعادلة $\left|x-|2x+1|\right|=4$ يمكن أن تكتب على الشكل

$$x-|2x+1|=4 \qquad (١)$$

أو:

$$x-|2x+1|=-4 \qquad (٢)$$

باستخدام تعريف دالة القيمة المطلقة يوجد لدينا احتمالين، المعادلة (١) يمكن أن تكتب على الشكل $|2x+1|=x-4$، وهذا يؤدي إلى احتمالين أيضاً:

$$2x+1=x-4 \qquad (٣)$$

أو:

$$2x+1=-(x-4) \qquad (٤)$$

حل المعادلة (٣) يعطينا $x=-5$ ، بينما حل المعادلة (٤) يعطينا $x=1$

والآن دعنا نفحص المعادلة (٢). يمكن أن تكتب المعادلة (٢) على الشكل:

$$2x+1=x+4 \qquad (٥)$$

أو:

$$2x+1=-(x+4) \qquad (٦)$$

حل المعادلة (٥) يعطينا $x=3$ ، بينما حل المعادلة (٦) يعطينا $x=-5/3$

ومن ثَم يبدو أننا وجدنا ما يظهر على أنه أربعة حلول مختلفة:

$$x=-5,1,3,-5/3$$

هل هذا صحيح؟ على الرغم من أن تحليلاتنا الرياضية كانت صحيحة، فإن $x=3$ و $x=-5/3$ هي فقط الحلول الصحيحة للمعادلة الأصلية $\left|x-|2x+1|\right|=4$ ، بينما الحلين الآخرين $x=1$ و $x=-5$ غير صحيحين، ويمكن لنا رؤية ذلك من خلال تعويضهما في المعادلة الأصلية:

$$\left|-5-|2(-5)+1|\right|=\left|-5-|-9|\right|=|-5-9|=|-14|=14$$

$$\left|1-|2(1)+1|\right|=\left|1-|3|\right|=|1-3|=|-2|=2$$

ملخص القصة هو أن عليك دائماً التحقق من إجاباتك وحلولك.

الفصل الثامن

لمع الحجر

من المهم أن تظهر عملك بشكل جيد، لذلك بعد أن تنتهي من حل مسألة رياضية عليك أن "تلمّع الحجر". قم بتوضيح حلك، واحذف الأشياء غير الضرورية، وركز على العناصر المهمة من خلال تدوينها وكتابتها. اكتب حلك بطريقة منظمة وكأنك تستخدم فرشاتك الملونة لرسم لوحة فنية جميلة، اكتب نظرياتك وبراهينك بأجمل طريقة ممكنة، كن فناناً وحاول أن تظهر الجمال الرياضي.

الناس الذين ينظرون إلى الرياضيات على إنها مجرد شكل معقد من أشكال الحساب، عادةً ما يتفاجؤون عندما يسمعون فكرة أن الرياضيات هي فن جميل. يمكن لك أن تعتقد – بشكل خاطئ طبعاً – أن الرياضيين لا يمتلكون العنصر الإبداعي لوضع "الفرشاة الملونة" على اللوحة الفنية. الرياضيات تصبح نوعاً من الفنون الجميلة عندما تتعلم كيف تتعامل معها كفنان. دعنا نأخذ مثالاً يوضّح كيف تتعامل مع الرياضيات كفنان وتلمّع الحجر. لا يوجد هنا شيء صحيح أو شيء خاطئ، فقط استمتع وامرح مع الرياضيات.

افرض أنك أثبت أن دالة معينة $f(n)$، معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة لها الشكل التالي: $f(n) = \frac{1}{2n+1}$. يمكنك أن تتوقف هنا، ولكن لماذا؟ ماذا تعني هذه الدالة؟ أحد التفسيرات هي أن $2n+1$ عدد فردي. ماذا يمكننا أن نعمل أيضاً؟ هل يمكننا أن نقوم بشيء ممتع ومبدع؟ إليك الفكرة التالية: إذا عرفت أن المعادلات التالية:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{و} \quad 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

فإنه يمكنك أن تعيد كتابة $f(n)$ كجملة تتعلق بنسبة بين مجاميع أعداد صحيحة موجبة:

$$3.f(n) = \frac{1+2+3+...+n}{1^2+2^2+3^2+...+n^2}$$

ليونهارد أويلر وهو أعظم رياضي القرن الثامن عشر عادةً ما كان يقوم بهذا النوع من المعالجات الإبداعية، وكان بارعاً جدًّا في ذلك. النظريات الجميلة عادةً ما تتحول إلى نظريات مهمة، القوة الكامنة في دراستك للرياضيات كنوع من الفنون يجب أن تدفعك لكي تسعى لإظهار الجمال الرياضي.

لكي نقوم بـ "تلميع الحجر" علينا أن نقدم تفسيراتنا ونتائجنا الرياضية بطريقة "نظيفة" وأنيقة بقدر الإمكان، لذا علينا صياغة نتائجنا بحيث تعبر عن أكبر قدر من المعلومات بأقل مجهود ممكن، وهذا ما يسمى مبدأ اقتصاد القوة (Economy of Force)، فالرياضيات تصبح أكثر قوة عندما تنجح الجمل البسيطة في ضم الكثير من الأراضي.

من المهارسات المعتادة التي يقوم بها الرياضيون تجنب الإشارة إلى عملياتهم الاستكشافية والاستقصائية، ولهذا السبب يظهر الرياضيون أحياناً بأنهم عباقرة، حيث يكتبون مسألة ما، ويقدمون فكرة ذكية، ويحلون المسألة، وهذا ما يشبه العملية التي يقوم بها الساحر عندما يخرج الأرنب من تحت القبعة، وهي تبدو لك كذلك لأنك لا ترى الأمور التي تحدث خلف الستارة. قد يمضي الرياضي العديد من الأسابيع يملأ سلال النفايات الورقية بالمحاولات الفاشلة قبل أن يصل في النهاية إلى حل برّاق وجميل، ثم بعد ذلك يقوم بـ "تلميع الحجر" حيث يزيل المخلفات والتفاهات ويقدم عمله بطريقة رياضية احترافية وجذابة. إذن عليك أن تفعل الشيء نفسه.

دائماً وثّق حلّك من خلال كتابته، حيث إن عملية الكتابة ستساعدك على توضيح أفكارك وبلورتها ورؤية الأخطاء التي وقعت فيها، كما أن الكتابة ستجبرك على التفكير بالتفصيلات الصغيرة وشرحها لشخص آخر. إذا لم تستطع أن تشرح أفكارك من خلال الكتابة، فأنت على الأغلب لم تفهم عملك. عليك أن تتقن الكتابة الرياضية لأنها عادةً ما تكون الخطوة الأخيرة والنهائية في عملية حلك للمسألة.

الفصل التاسع

فكّر وتعلم

إذا أردت أن تصبح أفضل في عملية حل المسألة الرياضية، يجب عليك أن تفكر وتتعلم من كل مسألة رياضية تعالجها. فبعد أن تقوم بحل المسألة، وتحلّل حلّك بعناية، عليك أن تجب عن السؤال: هل واجهت أي مصاعب أو عوائق ذهنية؟ ما هو الشيء الصحيح الذي قمت به؟ ما الذي كان باستطاعتك عمله بشكل أفضل؟ ابحث عن الأفكار المفتاحية، والمفاهيم، والمبادئ، والطرائق التي ساعدتك في حل المسألة، واكتب ما تعلمته. هذه الأشياء ستكون مفيدة عندما تحل المزيد من المسائل في المستقبل. ابحث أيضًا عن أي نظريات قد تساعدك في حل المسألة بطريقة أكثر فعالية.

إلى جانب مراجعتك للحل، انظر إذا كان هناك حل آخر، الكتب التي تتناول المسائل الرياضية عادةً ما يوجد بها حلول للمسائل في نهاية الكتاب، اطّلع على حلول الناس الآخرين لترى إذا ما كنت ستتعلم شيئاً منهم، وعادةً ما يوجد أكثر من طريقة صحيحة تؤدي إلى حل المسألة الرياضية، الناس الآخرين ربما يجدون طرائق أفضل لحل مسألتك، ومن خلال اطلاعك على حلولهم يمكنك أن تتعلم وتحسن من قدراتك في حل المسائل الرياضية.

تجميع المسائل الجيدة وتصنيفها هي إحدى الممارسات الجيدة التي يمكن أن تقوم بها، حيث يمكن لهذه المسائل أن تكون مثيرة للاهتمام، وممتعة، ومفيدة، وتقدم لك المساعدة في المشكلات التي قد تواجهها في سياق العمل. يجب عليك أن تُجمِّع وتحتفظ وتدرس هذه المسائل. أنا شخصيًّا أفضل أن أحتفظ بالمسائل الجيدة من خلال تدوينها على بطاقات مصنفة من القياس (5×8)، تتكون كل بطاقة من ثلاثة أقسام: المسألة، والأفكار المفتاحية، والحل. وعندما يكبر عدد المسائل التي تحتفظ بها يمكنك أن تقوم بتصنيفها وفقاً للنوع: نظرية الأعداد، التركيبات، الجبر، المنطق، ... إلخ. وهذا مثال على أحد البطاقات التي استخدمها لتصنيف المسائل التي أقوم بتجميعها:

الرقم: ٢٧، التطابق نظرية الأعداد

المسألة: هل يمكن تمثيل العدد 19^{19} كمجموع مكعب عدد صحيح موجب وعدد صحيح موجب مرفوع للقوة الرابعة؟ $m, n \in Z^+$ $19^{19} = m^3 + n^4$ ؟

الأفكار المفتاحية: خذ بعين الاعتبار الأعداد الصحيحة وفقاً للقياس 13

الحل: لا يمكن القيام بذلك، فعندما نأخذ بعين الاعتبار الأعداد الصحيحة وفقاً للقياس 13، نجد أن:

$$m^3 \equiv 0,\ 1,\ 5,\ 8,\ 12 \pmod{13}$$

وبشكل مماثل فإن:

$$n^4 \equiv 0,\ 1,\ 3,\ 9 \pmod{13}$$

ومن ثَم فإن $m^3 + n^4$ يمكن أن تكون متطابقة مع 0، أو 1، أو 2، أو 3، أو 4، أو 5، أو 6، أو 8، أو 9 $\pmod{13}$، ولكن ليس مع 7 $\pmod{13}$. على كل حال فإن $19 \equiv 6 \pmod{13}$، أي إن $19^{19} \equiv 6^{19} \equiv 7 \pmod{13}$، لذلك فهذا غير ممكن. لاحظ من خلال نظرية فيرمات أن $6^{12} \equiv 1 \pmod{13}$، ومن ثَم فإن $6^{19} \equiv 6^7 \equiv 7 \pmod{13}$ (وذلك بعد القيام بالعديد من عمليات التبسيط الطويلة).

الباب الثاني

حل مسائل رياضية بإستراتيجية المدفأة

مقدمة الباب الثاني

سنقوم بالعمل الآن من خلال محاولة فهم ومناقشة بعض المسائل الرياضية الجيدة والمثيرة للتحدي. معظم الكتب المتعلقة بحل المسألة الرياضية تقدم مجموعة من المسائل متبوعة ببعض الحلول العبقرية والذكية، وعلى فرض أنك استطعت فهم الحل، فإنك ستشعر بالغباء، وسيأتيك شعور أنه ليس لديك أي فرصة لأن تكون ذكيًا جدًا بحيث تستطيع حل مثل هذه المسائل بنفسك. وهذا في الحقيقة مجرد وهم؛ فالشخص الذي حل المسألة لم يبدأ الحل بفكرة بسيطة وعبقرية، ولكنه بالتأكيد صارع وعانى لوقت طويل وقام بالعديد من المحاولات الفاشلة قبل أن يصل إلى هذا الحل العبقري والأنيق.

وبشكل عام في حل المسألة الرياضية فإن الحلول القبيحة تسبق الحلول الجميلة، فالحل القبيح يظهر بهذا الشكل الجميل بعد أن تقوم بالكثير من العمل الشاق، وتقضي الكثير من الوقت في استكشاف الحلول القبيحة. دعنا نجلس حول المدفأة ونناقش بشكل ودي بعض الاستكشافات الرياضية، وحاول خلال استكشافنا لهذه المسائل أن تبحث عن الأفكار المفتاحية والرؤى الثاقبة المتعلقة بالحل النهائي.

المسألة الأولى

مجموع الجذور

لتكن $f(x)$ دالة حقيقية القيمة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية. إذا كانت الدالة $f(x)$ تمتلك خمسة جذور حقيقية مختلفة، وتحقق الخاصية $f(5-x)=f(5+x)$، أوجد مجموع هذه الجذور.

تبدو هذه المسألة مخيفة نوعاً ما، حيث إنها تطلب منا إيجاد مجموع الجذور لدالة لا نعرف قاعدتها ولا حتى كيف تبدو، وفي الحقيقة فإنها تبدو وكأنها مسألة يستحيل علينا حلها.

كان من الجميل حقًّا لو كانت الدالة $f(x)$ كثيرة حدود، فعندها كنا نستطيع أن نستخدم حقيقة وجود خمسة جذور مختلفة ونستفيد من النظرية الأساسية في الجبر لنحصل على كثيرة حدود عامة من الدرجة الخامسة، وهذا كان سيعطينا على الأقل مكاناً ما لنبدأ منه الحل. ولكن للأسف المسألة لم تشر إلى أن $f(x)$ كثيرة حدود، وكل ما نعرفه أنها دالة حقيقية القيمة لها خمسة جذور حقيقية مختلفة، ومن ثَم فإن الدالة يمكن أن تشبه أي شيء يمكن تخيله. يا للهول! إن هذا يشعرنا بالضياع، من أين سنبدأ حل هذه المسألة؟

هل فهمنا المسألة حقاً؟ أولاً، المسألة لم تطلب منا إيجاد الجذور الخمسة، ولكنها طلبت منا إيجاد مجموع هذه الجذور. ومن ثَم يمكن لنا أن نعالج مجموع الجذور من خلال التعامل معها ككيان منفصل دون الحاجة لتحديد الجذور الفردية x_1، x_2، x_3، x_4، x_5. ثانياً، بما أن الدالة $f(x)$ معرفة على الأعداد الحقيقية فلا داعي للقلق من الأعداد المركبة. ثالثاً، بما أن المسألة لم تعطنا سوى العلاقة $f(5-x)=f(5+x)$ فإن الإستراتيجية الأفضل لحل هذه المسألة تكمن في تسليط الضوء على هذه العلاقة بدلاً من محاولة تحديد طبيعة أو شكل هذه الدالة.

ما هو هجومنا الغاشم للحل؟ لسوء الحظ وفيما يتعلق بهذه المسألة بالذات أشعر أن أفكاري مشتتة. بما أننا لا نعرف الدالة $f(x)$، فإننا لا نستطيع تعويض بعض الأرقام في قاعدة الدالة للبحث عن أنماط في البيانات. لقد أمضيت الكثير من الوقت لمحاولة رسم الدالة ولكن ذلك لم يساعد كثيراً.

دعنا نستكشف هذه المسألة من خلال التركيز على العبارة المعطاة $f(5-x) = f(5+x)$. سيكون من الجميل معرفة بعض الأشياء البسيطة والأساسية المتعلقة بهذه العبارة مثل: $f(0)$، $f(x)$، $f(-x)$. فكرة أخرى قد تكون مفيدة بالنسبة لنا وهي دراسة ما إذا كانت الدالة $f(x)$ دورية أم لا من خلال البحث عن عدد حقيقي T بحيث يكون $f(x) = f(x+T)$. ولكنني سأقوم باستبعاد هذا الاحتمال؛ لأن المسألة تخبرنا بوجود خمسة جذور مختلفة، ومن ثَم إذا كانت الدالة $f(x)$ دورية، فإن وجود جذر واحد لها يعني وجود عدد لا نهائي من الجذور الأخرى، وذلك لأنه إذا كان x_1 جذر للدالة فإن:

$$f(x_1) = f\left(x_1 + T\right) = 0$$

وهذا يعني أن:

$$f\left(x_1 + T\right) = f\left(\left(x_1 + T\right) + T\right) = f\left(x_1 + 2T\right) = 0$$

وهكذا، دعنا نرى إذا كان بالإمكان إيجاد علاقة لـ $f(x)$، فأنا لا أحب رؤية الأحجية $5-x$ و $5+x$. دعنا نقوم بتعويض $u = x+5$ أو $x = u-5$ في العلاقة الأصلية لنحصل على $f(u) = f(10-u)$. وإذا قمنا باستبدال u بـ x فإن هذا يكافئ:

$$f(x) = f(10-x)$$

من الواضح أن هذه العلاقة أفضل من العلاقة الأصلية التي أعطيت في المسألة، وذلك لأنها تعطينا $f(x)$ نفسها في الطرف الأيسر. والآن دعنا نفكر قليلاً. نحن نعرف أن الدالة $f(x)$ تمتلك خمسة جذور مختلفة، لنفترض أن هذه الجذور هي: x_1، x_2، x_3، x_4، x_5. إذا عوضنا هذه الجذور الخمسة في العلاقة $f(x) = f(10-x)$ نحصل على:

$$f(x_1) = f(10-x_1) = 0$$

$$f(x_2) = f(10-x_2) = 0$$

$$f(x_3) = f(10-x_3) = 0$$

$$f(x_4) = f(10 - x_4) = 0$$

$$f(x_5) = f(10 - x_{10}) = 0$$

هذه المعادلات تخبرنا أن الجذور الخمسة المختلفة للدالة $f(x)$ ليست فقط x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 ، x_5 ، ولكن $10 - x_1, 10 - x_2, 10 - x_3, 10 - x_4, 10 - x_5$ هي أيضاً جذور مختلفة لهذه الدالة. ومن ثَم فإن مجموع الجذور يساوي:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= (10 - x_1) + (10 - x_2) + (10 - x_3) + (10 - x_4) + (10 - x_5) \\ &= 50 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \end{aligned}$$

إذا فرضنا أن $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ ، فإن $S = 50 - S$ ، أو $2S = 50$. ولهذا فإن مجموع الجذور الخمسة الحقيقية المختلفة للدالة يساوي 25 .

المسألة الثانية

حاصل ضرب الظلال

أوجد قيمة:

$$P = \tan(15).\tan(30).\tan(45).\tan(60).\tan(75)$$

حيث جميع الكميات معطاة بالدرجات وليس بالتقدير الدائري (الراديان).

هذه المسألة تُعدّ مثالاً جيداً لتمييز الرياضيين بين "الجواب" و"الحل". إيجاد الجواب هو أمر سهل، حيث إنك ببساطة تتناول آلتك الحاسبة وتجد الجواب العددي. ولكنك إذا فعلت ذلك في اختبار الرياضيات في كليتك فإن المحاضر سوف يعطيك درجة الرسوب "هـ". ولكن لماذا؟ لأننا في الحقيقة نريد "حل" هذه المسألة، ونريد أن نرى طريقة ثاقبة ومنطقية وجميلة لحل المسألة دون اللجوء إلى الآلة الحاسبة أو جداول الدوال المثلثية. أي شخص بإمكانه إيجاد الجواب، ولكنك بحاجة لفنان لإيجاد حل جميل.

كيف نبدأ؟ دعونا نبدأ بحل "الهجوم الغاشم"، خذ آلتك الحاسبة، ثم أدخل الأرقام، ثم اضغط على زر الظل وجد حاصل الضرب. ستحصل على الإجابة "1"، مذهل! هذه ليست صدفة، يبدو أن رياضيًّا بارعاً وبشكل متعمد قد رتبها لتكون بهذه الشكل. عندما تحصل على إجابة جميلة فعلاً مثل "1" أو "0" عليك أن تكون متيقناً أن شيئاً ممتعاً يحدث في هذه المسألة. غالباً ما يكون حل المسألة أسهل إذا كنا نعرف الإجابة مسبقاً، حيث إن معرفة أن الجواب سيكون "$P = 1$" سيوجهنا إلى الاتجاه الصحيح الذي علينا أن نسلكه.

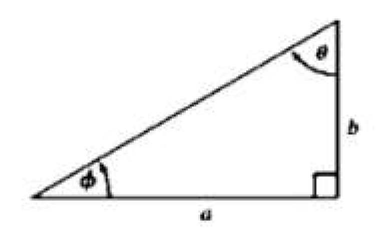
بما أن جواب هذه المسألة هو "1" الذي هو فعلاً جواب جميل، يجب أن نسأل أنفسنا كيف يمكن أن يكون الجواب "1"؟ الظل والدوال المثلثية الأخرى مثل الجيب وجيب التمام تعطينا نسب الأضلاع في المثلثات القائمة الزاوية. ولذلك فإن ظل زاوية ما سيكون نسبة مثل $\left(\frac{a}{b}\right)$. وبما أننا نقوم بإيجاد حاصل ضرب مجموعة من الظلال، ونعرف أن الإجابة ستكون (1) فإن هذه النسب يجب أن ترتب بطريقة ما بحيث تلغي بعضها. نسبة معينة مثل $\left(\frac{a}{b}\right)$ يجب أن يتم ضربها بالمقدار $\left(\frac{b}{a}\right)$ ليكون الناتج:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)=1$$

هذه الملاحظة تقترح أن حل هذه المسألة يجب أن يتضمن عمل اقتران أو مزاوجة بين دوال الظل بطريقة ذكية، ولكن كيف؟

في المثلث القائم الزاوية يوجد زاوية واحدة قياسها $90°$، والزاويتان الأخريان؛ لنسميهما مثلاً θ، ϕ يجب أن يكون مجموعهما $90°$، أي أن $90=\phi+\theta$ وذلك لأن مجموع زوايا المثلث $180°$. ومن ثم إذا كان $\tan(\theta)$ يساوي $\left(\frac{a}{b}\right)$ فلا بد أن يكون $\tan(\phi)$ الذي هو الزاوية الأخرى يساوي $\left(\frac{b}{a}\right)$.

لنرسم صورة تساعدنا على توضيح ذلك:



بما أن $1=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$، فإن:

$$\tan\theta.\tan\phi=\tan\theta.\tan(90-\theta)=1$$

وهذا ما نحتاجه بالضبط، والآن نحن نعلم كيف سنتابع. لنأخذ أزواجاً من دوال الظل بحيث تكون زواياها متتامة (مجموعها $90°$) كما يلي:

$$\tan(15).\tan(75).\tan(30)\tan(60)\tan(45)$$

حسناً نستطيع أخذ زوج الزوايا (15° ، 75°) لأن $90 = 75 + 15$ ، كما نستطيع أخذ زوج الزوايا (30° ، 60°) لأن $90 = 60 + 30$ ، ماذا عن الزاوية 45° ؟ لقد حالفنا الحظ هنا حيث إن ظل الزاوية 45° هو "1" . والآن وباستخدام حيلة الأزواج، مع حقيقة أن $\tan\theta.\tan(90-\theta) = 1$ نحصل على الحل التالي:

$$\tan(15).\tan(75).\tan(30)\tan(60)\tan(45) = 1$$

لاحظ أنه باستثناء الزاوية 45° فإننا لم نحتج أن نعرف القيم الفعلية للظل، كما أن الآلة الحاسبة أو جداول الدوال المثلثية لم تكن ضرورية. عندما تكتب حلك لنشره فإنك لا تخبر الناس عن أساليبك الاستقصائية السرية؛ فأنت تعرض المسألة، ثم توضح أنه يجب عليك أن تستخدم خدعة المزاوجة، ثم تحل المسألة. وهنا سوف يعتقد الناس أنك عبقري.

المسألة الثالثة

كثيرة الحدود الواحدية من الدرجة الرابعة

إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود واحدية (Monic Polynomial) من الدرجة الرابعة لها القيم الآتية:

$$f(3) = 30 \text{ ، } f(2) = 20 \text{ ، } f(1) = 10$$

جد قيمة المقدار:

$$f(12) + f(-8) - 19000$$

كيف يمكن لنا حل مثل هذه المسألة؟ تفكيرنا الأولي سيتجه نحو إيجاد كثيرة الحدود $f(x)$ ، ويبدو هذا منطقيًا لأن معرفة $f(x)$ سيمكننا من حساب المقدار $f(12) + f(-8) - 19000$ بسهولة تامة. من خلال التعريف فإن كثيرة الحدود الواحدية هي كثيرة حدود معاملها الرئيس هو العدد واحد، ومن ثَم فإن الصيغة العامة لكثيرة الحدود الواحدية من الدرجة الرابعة سيكون على الصورة:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

بحيث إن المعاملات a ، b ، c ، d هي أعداد حقيقية (أو قد تكون مركبة) مجهولة. يوجد نظرية قد تكون مفيدة هنا:

نظرية 1.3 كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة n يمكن تحديدها تماماً بصورة وحيدة من خلال معرفة قيمتها عند $n+1$ من القيم المختلفة لـ x .

لدينا مشكلة محتملة هنا، فكثيرة الحدود الواردة في المسألة من الدرجة الرابعة، ولكننا نعرف قيمتها عند ثلاث نقاط فقط وليس خمس. بالطبع الوضع ليس بهذا السوء، حيث إن كثيرة الحدود

واحدية، ومن ثَم لدينا أربعة مجاهيل فقط a ، b ، c ، d . ولكن المسألة ما زالت قائمة حيث إننا نعرف قيمة الدالة عند ثلاث نقاط فقط. ماذا علينا أن نفعل؟ دعنا نمتلك الثقة بأن الأشياء ستسير قدماً وستعمل بشكل ما، ولنتخلى عن الحذر والخوف ونهاجم العدو بشكل مباشر، ومع أن هذا يبدو غير منطقي ولكنها إستراتيجية في الرياضيات صحيحة تماماً. والآن دعنا نستخدم المعطيات الموجودة في المسألة $f(1) = 10$ ، $f(2) = 20$ ، $f(3) = 30$:

$$f(1) = a + b + c + d + 1 = 10$$
$$f(2) = 8a + 4b + 2c + d + 16 = 20$$
$$f(3) = 27a + 9b + 3c + d + 81 = 30$$

إذا أعدنا ترتيب هذه المعادلات نحصل على نظام من ثلاث معادلات خطية آنية في أربعة مجاهيل.

$$a + b + c + d = 9$$
$$8a + 4b + 2c + d = 4$$
$$27a + 9b + 3c + d = -51$$

وبما أن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل، يبدو أن هذا النظام ليس له حل وحيد. دعنا نتظاهر بأننا نعرف قيمة d ونعيد كتابة نظام المعادلات بحيث يبدو نظاماً من ثلاث معادلات في ثلاثة مجاهيل a ، b ، c

$$a + b + c = 9 - d$$
$$8a + 4b + 2c = 4 - d$$
$$27a + 9b + 3c = -51 - d$$

وإذا كنت تفضل التعامل مع المصفوفات يمكنك إعادة كتابة هذه المعادلات باستخدام المصفوفات كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-d \\ 4-d \\ -51-d \end{bmatrix}$$

وعند هذه النقطة، كل ما لدينا هو مجرد تمرين قياسي في الجبر الخطي. يوجد العديد من الطرائق المميزة لحل هذا النظام، ولكن الطريقة المباشرة هي:

- جد قيمة a من المعادلة الأولى بدلالة b ، c ومن ثم عوض هذه القيمة في المعادلة الثانية.
- حل المعادلة الثانية بالنسبة للمتغير b .
- عوض قيمة a ، b في المعادلة الثالثة وجد قيمة c .
- اعمل بطريقة عكسية لإيجاد قيمة كل من b و a .

دعنا نتجاوز التفصيلات وننتقل مباشرة لنتيجة حل هذا النظام:

$$c = 4 - \frac{11d}{6} \text{ ،} b = d + 11 \text{ ،} a = -\frac{d}{6} - 6$$

كل ما علينا القيام به الآن هو تعوض قيمة a ، b ، c في كثيرة الحدود:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

لنحصل على:

$$f(x) = x^4 + \left(\frac{-d}{6} - 6\right)x^3 + \left(d + 11\right)x^2 + \left(4 - \frac{11d}{6}\right)x + d$$

ويبدو هذا التعبير معقداً نوعاً ما، ولكن راقب ماذا يحدث عندما نجد قيمة:

$$f(12) + f(-8) - 19000$$

حيث سنحصل على أن:

$$\begin{aligned} f(12) + f(-8) - 19000 &= 12000 - 165d + 165d + 7840 - 19000 \\ &= 840 \end{aligned}$$

لاحظ أن المجهول d وبطريقة سحرية تم حذفه ما مكننا من إيجاد قيمة المقدار المطلوب.

المسألة الرابعة

لا يوجد جذور سالبة

أثبت أن المعادلة:

$$x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$$

ليس لها جذور حقيقية سالبة.

هذه واحدة من مسائلي المفضلة، حيث إنها مسألة جيدة للتدريس لأنها تتضمن العديد من الأفكار والإستراتيجيات المتعلقة بحل المسألة. دعونا نتذكر أن جذور كثيرة الحدود $f(x)$ هي جميع قيم x التي تحقق المعادلة $f(x) = 0$. النظرية الأساسية في الجبر التي تعد أهم نظرية في الجبر تخبرنا أن كثيرة الحدود من الدرجة n تمتلك بالضبط n من الجذور في مجال الأعداد المركبة (مع السماح بإمكانية تكرار الجذور). إستراتيجيتنا لحل هذه المسألة سوف تعتمد ببساطة على إيجاد هذه الجذور. وفي الحقيقة عندما استخدمت آلتي الحاسبة من النوع $(T1 - 89)$ حصلت على الجذور التالية:

$$x_1 = 0.4211852391$$

$$x_2 = 5.865581749$$

$$x_3 = -0.643383494 + 1.097800278i$$

$$x_4 = -0.643383494 - 1.097800278i$$

لاحظ أن الجذرين الثالث والرابع هما جذور مركبة لأنها تحتوي على العدد التخيلي $i = \sqrt{-1}$. كما يمكنك أن تلاحظ أن الجذرين الأول والثاني جذور حقيقية، ومن الواضح أنها ليست جذور سالبة. هذا هو حل الهجوم الغاشم للمسألة لكنه يخبرنا أن العبارة المعطاة في المسألة صحيحة حيث لا يوجد جذور سالبة حقيقية لكثيرة الحدود.

كيف يمكن لنا حل هذه المسألة بطريقة أكثر أناقة؟ لاحظ أولاً أن هذه المسألة من النوع التي يطلب فيها "إثبات" صحة عبارة ما. وفي الحقيقة فإنه لم يطلب منا إيجاد جذور كثيرة الحدود، ولكن طلب منا أن نثبت بأن كثيرة الحدود ليس لها جذور حقيقية سالبة. كيف يمكن لنا أن نقوم ذلك؟

من الجيد عندما نثبت مثل هذه المسائل أن نلجأ لاستخدام البرهان بطريقة بالتناقض، وهي طريقة معروفة وعادةً ما يلجأ الرياضيون لاستخدامها. سنفرض أن كثيرة الحدود المعطاة لها جذر سالب، ثم نتوصل إلى أن هذا الفرض يقودنا إلى تناقض. وبما أننا سنصل إلى تناقض، فلا بد أن تكون فرضيتنا خاطئة، وهذا يعني أن المعادلة ليست لها جذور حقيقية سالبة.

لنفرض أن x جذراً سالباً للمعادلة. ماذا سيحدث؟ سوف نقوم بتعويض x في كثيرة الحدود المعطاة، ويجب علينا حساب القوى المختلفة لـ x مثل x^4 ، x^3 ، x^2 ، x^1 . ماذا سيحدث عندما نحسب القوى لعدد سالب. لتوضيح ذلك دعونا نأخذ حالة خاصة عندما $x = -1$

$$(-1)^1 = 1 \text{ ،} (-1)^2 = 1 \text{ ،} (-1)^3 = -1 \text{ ،} (-1)^4 = 1$$

يمكننا بسهولة ملاحظة هذا النمط المثير حيث إن:

$$(-1)^{odd} = -1 \text{ ،} (-1)^{even} = +1$$

وفي الحقيقة إذا فكرنا في ذلك فإن هذه الملاحظة صحيحة لقوى أي عدد سالب وذلك لأن "سالب × سالب = موجب"، كما أن "سالب × سالب × سالب = سالب". وهذا يدعونا إلى تركيز انتباهنا إلى طبيعة قوى العدد x (موجبة أو سالبة).

والآن سنستخدم مبدأ "فرق تسد" حيث سنقوم بتقسيم المعادلة بناءً على نوعية (فردية أو زوجية) قوى العدد x . دعونا نضع القوى الفردية للعدد x في الجهة اليسرى من المعادلة، ونضع القوى الزوجية في الجهة اليمنى:

$$5x^3 + 7x = x^4 - 4x^2 + 4$$

ولحسن الحظ عندما تكون x سالبة سوف نحصل على نوع من التناقض، دعونا نقوم بشيء آخر قد يساعدنا هنا وهو تحليل الجهة اليمنى من المعادلة. لماذا سنقوم بذلك؟ هذا ما نسميه الحدس في

العمل. دائماً حاول أن تحلل كثيرات الحدود. فقط افعل ذلك بحيث تصبح عادةً لديك، بمجرد رؤيتك لكثير حدود قم بتحليله، وبمجرد رؤيتك لقطعة من الدونات قم بأكلها، إن الأمر بهذه البساطة.

بعد تحليل الطرف الأيمن سنحصل على المعادلة التالية:

$$5x^3 + 7x = \left(x^2 - 2\right)^2$$

بما أن x عدد سالب فإن الطرف الأيسر من المعادلة سيعطينا مقداراً سالباً لأن القوى الفردية لعدد سالب دائماً تعطينا أعداد سالبة. ماذا عن الطرف الأيمن؟ بما أنه يوجد لدينا مقداراً مربعاً في الطرف الأيمن، فلا بد أن يكون موجباً. إذاً وصلنا إلى تناقض: "سالب = موجب". ومن ثَم فإن فرضيتنا الأصلية بأن x جذر سالب لا بد أن تكون خاطئة، ومن ثَم فإن كثيرة الحدود المعطاة ليس لها جذور سالبة. لقد اكتمل الإثبات، لذا دعونا نأكل الدونات.

المسألة الخامسة

دالة دورية

إذا كانت $f(x)$ دالة حقيقية غير ثابتة بحيث إن:

$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{3}f(x)$$

لجميع قيم x، فأثبت أن $f(x)$ دالة دورية (Periodic Function).

هذا النوع من المسائل هي مسائل تتضمن معادلات دالية، حيث تم إعطاؤنا علاقة معينة لدالة ما ولكننا لا نعرف ما هي الدالة. وتطلب منا المسألة إثبات أن الدالة غير المعروفة هي دالة دورية.

دعونا نرجع إلى الأساسيات. ما هي الدالة الدورية؟ تسمى الدالة $f(x)$ دالة دورية ذات دورة T إذا وجد ثابت حقيقي T بحيث إن $f(x+T)=f(x)$. مهمتنا الآن أصبحت واضحة، حيث إنه علينا إثبات أن $f(x+T)=f(x)$ حيث T عدد حقيقي.

بما أن الدالة $f(x)$ غير معروفة ولا يوجد الكثير من الأمل في تحديد قاعدتها؛ لذا يجب علينا الآن أن نركّز على العلاقة المعطاة في المسألة، وهذا عادةً ما يكون نمطيًا في المعادلات الدالية. استخدم العلاقة المعطاة لك، وحاول استخدام بعض التوليفات من التعويضات والتعويضات المعاكسة لحل المسألة. لاحظ أننا حقيقة لا نحتاج معرفة ماهية هذه الدالة، فكل ما نحتاجه هو إثبات أنه يوجد عدد حقيقي T بحيث $f(x+T)=f(x)$. لا يوجد في المسألة ما يضمن لنا أن الدورة المجهولة T هي عدد صحيح موجب. قد لا تكون كذلك، ولكن لنفترض أن T هي عدد صحيح موجب ونرى ماذا سيحدث بعد ذلك.

يمكننا إعادة كتابة المعادلة المعطاة بالطريقة الآتية:

$$f(x+1)=\sqrt{3}f(x)-f(x-1)$$

وهذا يعطينا $f(x+1)$، وهي لسوء الحظ لا تساوي $f(x)$.

ماذا عن $f(x+2)$؟ يمكن لنا وعلى نحو غير متوقع أن نجد $f(x+2)$ من خلال استبدال x بـ $x+1$ في المعادلة $f(x+1)$ لنجد أن:

$$\begin{aligned} f(x+2) &= f((x+1)+1) \\ &= \sqrt{3}f(x+1)-f((x+1)-1) \\ &= \sqrt{3}f(x+1)-f(x) \end{aligned}$$

لاحظ أن $f(x+2)$ لا تساوي $f(x)$، وهذا سيء للغاية. لذلك علينا الاستمرار في إجراءاتنا السابقة على أمل أن نصل لشيء ما. نحن الآن نعرف $f(x+1)$ و $f(x+2)$، لذلك دعنا نجد $f(x+3)$

$$\begin{aligned} f(x+3) &= f((x+1)+2) \\ &= \sqrt{3}f(x+2)-f(x+1) \\ &= \sqrt{3}\left(\sqrt{3}f(x+1)-f(x)\right)-f(x+1) \\ &= 3f(x+1)-\sqrt{3}f(x)-f(x+1) \\ &= 2f(x+1)-\sqrt{3}f(x) \end{aligned}$$

لغاية الآن لم نصل إلى أن $f(x)=f(x+T)$. إما أن هذه المسألة تختبر صبرنا أو أننا نسير في الاتجاه الخاطئ. دعنا نستمر باستخدام التعويض ونجد $f(x+4)$، $f(x+5)$، $f(x+6)$. ولحسن الحظ وبعد هذا العمل الشاق نجد أن $f(x+6)=-f(x)$، وهذا على الأغلب هو ما نريده، باستثناء أن لدينا إشارة سالبة على الطرف الأيمن من المعادلة. هل تشعر أنك علقت في هذه المسألة؟ ربما علينا أن لا نستسلم بسرعة، وقد يكون هذا الاكتشاف الأخير مفيداً بالنسبة لنا.

نحن نعرف الآن أن $f(x+6)=-f(x)$. إذا عوضنا $x+6$ بدلاً من x في المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$f(x+12)=f((x+6)+6)=-f(x+6)=-(-f(x))=f(x)$$

وأخيراً وصلنا إلى ما نبحث عنه، حيث قمنا بإثبات أن:

$$f(x+12)=f(x)$$

ومن ثَم فإن الدالة $f(x)$ هي دالة دورية بدورة $T = 12$.

أحياناً حل المسألة الرياضية يتطلب أكثر بقليل من مجرد فكرة جيدة، حيث يتجاوز ذلك إلى بذل الكثير من العمل الشاق. عندما قمت بحل هذه المسألة كنت على وشك الاستسلام عند الخطوة التي حسبت فيها $f(x+5)$ ، ولكن الحسابات الجيدة ظهرت معي عندما حصلت على $f(x+6)$. لذلك عند حل أي مسألة رياضية كن مثابراً ولا تستسلم بسرعة.

المسألة السادسة

قوى العدد 3

أوجد أصغر عدد صحيح موجب ترتيبه 50 ، ويمكن كتابته على شكل قوى مختلفة، وصحيحة، وغير سالبة للعدد 3 .

أفضل طريقة للبدء في هذه المسألة هي أن نرى إذا كان باستطاعتنا أن نجد بعضاً من الأمثلة على الأعداد الموصوفة في المسألة. كيف سيكون شكل هذه الأعداد؟ 253 هو أحد الأمثلة على هذه الأعداد حيث إن $253 = 3^0 + 3^2 + 3^5$. لاحظ أن العدد 253 يحقق الخصائص المطلوبة حيث إنه حاصل جمع قوى مختلفة للعدد 3 وجميعها أعداد صحيحة وغير سالبة، وبما أن الصفر عدد غير سالب فلا مشكلة لدينا في وجوده كقوة للعدد 3 . هل يمكننا إيجاد عدد آخر؟ لنأخذ العدد:

$$3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^7 = 2226$$

نأمل من خلال النظر في بعض هذه الأعداد التي تحقق الخصائص المطلوبة أن نجد نمطاً من نوع ما أو رؤية معينة تساعدنا في حل هذه المسألة.

يوجد ملاحظة مهمة ومفتاحية في التمثيلين: $3^0 + 3^2 + 3^5$ ، و $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^7$ ، حيث إنها تشبه، وبشكل يثير الريبة، تمثيل الأعداد من خلال الأساس 3 . تذكر أنه يمكننا تمثيل العدد الصحيح الموجب n من خلال الأساس 3 من خلال الصيغة التالية:

$$n = a_k 3^k + a_{k-1} 3^{k-1} + \dots + a_2 3^2 + a_1 3^1 + a_0 3^0$$

بحيث إن المعاملات a_i يمكن لها أن تأخذ القيم: 0، 1، 2. ولكن في مسألتنا المعاملات تأخذ القيم 0، 1 فقط ولا تأخذ القيمة 2. لنرجع إلى العدد 253، لاحظ أنه يمكننا التعبير عنه بالصورة التالية:

$$1.3^5 + 0.3^4 + 0.3^3 + 1.3^2 + 0.3^1 + 1.3^0 = (1,0,0,1,0,1)_3$$

لذلك فإن حل "الهجوم الغاشم" لهذه المسألة يتمثل ببساطة بعمل قائمة تتضمن جميع الأعداد التي تمتلك الصيغة المطلوبة بالترتيب من الأصغر للأكبر، ومن ثم إيجاد العدد الأصغر ذي الترتيب 50 في القائمة. ولكننا عندما نقوم بذلك فإن جميع الأعداد التي يتم تمثيلها من خلال الأساس 3 ستبدو وكأنها أعداد ثنائية (مكتوبة بالنظام الثنائي)! على سبيل المثال العدد 253 المذكور سابقاً عندما يكتب من خلال الأساس 3 سيكون على الشكل $(1,0,0,1,0,1)_3$. لاحظ أن كل هذه الأصفار والواحدات تذكرنا بالأعداد الثنائية، وهذه الملاحظة تؤدي بنا إلى فكرة عبقرية. دعنا نسرد جميع الأعداد الثنائية بالترتيب من 1 إلى 50:

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
2 &= 10\\
3 &= 11\\
4 &= 100\\
5 &= 101\\
&\dots\\
50 &= 110010
\end{aligned}$$

والآن تظاهر وكأن 110010 (التمثيل الثنائي للعدد 50) هو في الحقيقة للأساس 3. إذن:

$$\begin{aligned}
(110010)_3 &= 1.3^5 + 1.3^4 + 0.3^3 + 0.3^2 + 1.3^1 + 0.3^0\\
&= 3^5 + 3^4 + 3^1\\
&= 327
\end{aligned}$$

ومن ثَم فإن الجواب عن مسألتنا هو 327.

دعنا الآن نجري مراجعة سريعة للخطوات التي قمنا بها لحل المسألة. في البداية لم يكن لدينا أي فكرة عن النقطة التي نبدأ من عندها الحل، لذلك بدأنا باقتراح عددين يمتلكان الصيغة المطلوبة وهما 253، 2226، حيث إن هذين العددين يمكن تمثيلهما كمجموع قوى مختلفة وغير سالبة للعدد 3، وفي

الحقيقة فقد قمنا "ببناء" هذه الأعداد بحيث تمتلك هذه الخاصية. بعد ذلك لاحظنا أن التمثيلات المختلفة للأعداد من خلال القوى المختلفة للعدد 3 تشبه تمثيلات الأعداد من خلال الأساس 3 ، باستثناء أن المعاملات تأخذ القيم 0 ، 1 فقط ولا تأخذ القيمة 2 . وعندما قمنا بتمثيل هذه الأعداد (المكتوبة من خلال الأساس 3) كمتجه معاملات مثل $(1,0,0,1,0,1)_3$ تظاهرنا وكأن هذه الأعداد في الواقع هي أعداد ثنائية. وعند هذه النقطة أصبح الحل واضحاً: ببساطة اعمل قائمة تضم جميع الأعداد الثنائية بالترتيب من 1 إلى 50 ، ثم اختر العدد ذا الترتيب 50 في القائمة، وتظاهر كأنه تم تمثيله من خلال الأساس 3 ، وأخيراً قم بتحويل هذا التمثيل إلى النظام العشري لتحصل على الجواب: 327 .

المسألة السابعة

أعداد صحيحة في متتالية

يحتوي وعاء على n من الكرات المرقمة بالأرقام $1,2,3,...,n$. إذا قمنا بشكل عشوائي بسحب الكرات من الوعاء واحدة تلو الأخرى حتى أصبح الوعاء فارغاً. من خلال هذه العملية ما احتمال أن تكون الأعداد الظاهرة على الكرات المسحوبة تمثل متتالية لأعداد صحيحة متتابعة.

في البداية نحتاج أن نفهم المسألة. ماذا نقصد بعملية "ناجحة"؟ دعنا نوضح واحدة من هذه العمليات. لنفرض أننا سحبنا كرة من الصندوق وكانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم ٥. لتكون المتتالية ناجحة، يجب أن تكون الكرة التالية المسحوبة تحمل الرقم 4 أو الرقم 6 . دعنا نفترض أن الرقم الظاهر على الكرة كان الرقم 6 ، ومن ثَم فإن المتتالية التي حصلنا عليها هي:

$$5,6$$

الآن اسحب كرة أخرى، وفي هذه المرة يجب أن يكون الرقم الظاهر على الكرة المسحوبة إما 4 أو 7 . إذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 4 يكون لدينا المتتالية:

$$4,5,6$$

وكي نحصل على متتالية ناجحة، الكرة المسحوبة التالية يجب أن تحمل الرقم 3 أو الرقم 7 ، وهكذا. وفي نهاية هذه العملية الناجحة، سوف نحصل على المتتالية:

$$1,2,3,...,n$$

إحدى الطرائق الجيدة لحل هذه المسألة هو أن نستخدم إستراتيجية العمل للخلف. لنفترض أن S_k تمثل مجموعة الكرات المرقمة المسحوبة من الوعاء التي تشكل متتالية "ناجحة" عدد عناصرها k من الأعداد الصحيحة الموجبة.

الآن لنبدأ من نهاية العملية حيث:

$$S_n = \{1,2,3,\cdots,n\}$$

والآن ومن خلال الرجوع للخلف، لدينا خياران للحصول على S_{n-1} من S_n. هاذان الخياران هما إما إزالة الكرة رقم 1 أو الكرة رقم n من المجموعة S_n. ومن ثَم لدينا كرتان من الممكن أزالتها بنجاح (1 أو n) وبما أنه لدينا n من الكرات في S_n، لذا فإن احتمال النجاح في الخطوة الأولى هو $2/n$. في الخطوة التالية، لدينا مرة أخرى خياران ناجحان ولدينا $n-1$ من الكرات في الوعاء، لذا فإن احتمالية النجاح لهذه الخطوة هو $2/(n-1)$. إذا أكملنا على هذا النهج سيتبقى لدينا كرة واحدة فقط في الوعاء، وهذه هي المجموعة S_1، وبهذا يكون لدينا فقط كرة واحدة للسحب. إذاً احتمال النجاح لهذه الخطوة سيكون $1/1 = 1$.

إن عملية العمل للخلف لها الاحتمالية نفسها التي تعود للطريقة العادية في الحل (العمل للأمام)، لأن عدد الاحتمالات لـ S_k في عملية العمل للخلف مساوٍ لعدد الاحتمالات لـ S_k في الطريقة العادية في الحل.

ومن ثَم فإن الاحتمال الكلي عبارة عن حاصل ضرب جميع الاحتمالات المستقلة المنفردة:

$$\frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\frac{2}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2^{n-1}}{n!}$$

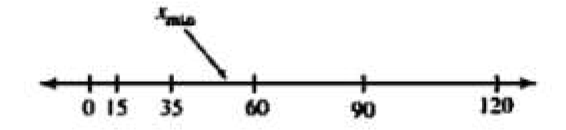
إن مسائل الاحتمالات عادةً ما تكون غير بديهية، وربما تكون مخيفة جدًّا. المنحى الجيد لحل مثل هذه المسائل هو أن نبدأ بمجموعة صغيرة ومحدودة، وليكن مثلاً $n = 5$، والعمل خطوة واحدة في كل مرة.

المسألة الثامنة

أقل مسافة كلية

ستة أشخاص يعيشون على امتداد شارعٍ ما، إذا فكرنا في هذا الشارع باعتباره خط الأعداد تكون مواقع هؤلاء الأشخاص هي: $x = 0$ ، $x = 15$ ، $x = 35$ ، $x = 60$ ، $x = 90$ ، $x = 120$.
يرغب مجموعة من المهندسين في بناء محطة لوقوف الحافلات في مكانٍ ما بحيث تكون المسافة الكلية التي يجب على الأشخاص سيرها من منازلهم إلى المحطة أقل ما يمكن. أين يجب أن يكون موقع موقف الحافلات على محور x ؟ وما هي أقل مسافة كلية؟

في البداية دعونا نرسم صورة لمساعدتنا على توضيح المسألة.



النقطة x_{min} سوف تكون موقع محطة الحافلات. لغاية الآن نحن لا نعرف أين يجب أن تكون x_{min} ، ويجب علينا معرفة ذلك. إذا كانت x_{min} كما في الموقع المحدد في الشكل عندئذ سيكون لدينا:

$$x_{min} - 60 < 0 \text{ ، } x_{min} - 35 > 0$$

ولتجنب القلق بشأن القيم الموجبة والسالبة دعنا نستخدم القيمة المطلقة لتمثيل المسافات التي يجب على الأشخاص سيرها. دعونا نتذكر تعريف القيمة المطلقة: لأي عدد حقيقي y ، تعرف القيمة المطلقة للعدد y كما يلي:

$$|y| = \begin{cases} y & if\, y \geq 0 \\ -y & if\, y < 0 \end{cases}$$

ولهذا فإن الشخص عند النقطة $x = 35$ عليه أن يسير مسافة مقدارها $|x_{min} - 35|$، بينما الشخص عند النقطة $x = 60$ عليه أن يسير مسافة مقدارها $|x_{min} - 60|$. وبالتأكيد فإن هذا الترميز صحيح لأن $|x - y| = |y - x|$.

يمكننا الآن وصف مشكلتنا بالقول إن المسافة الإجمالية التي يجب على الأشخاص سيرها للوصول إلى محطة الحافلات هي:

$$d_{tot}(x) = |x_{min}| + |x_{min} - 15| + |x_{min} - 35| + |x_{min} - 60| + |x_{min} - 90| + |x_{min} - 120|$$

وعليه فإن ما علينا فعله الآن هو إيجاد قيمة x_{min} التي تجعل $d_{tot}(x)$ أقل ما يمكن.

إذا كنت لا تعرف كيفية حل معادلات القيمة المطلقة فستكون هذه مشكلة كبيرة بالنسبة لك. إستراتيجيتنا لحل هذه المسألة ستكون تعويض قيم مختلفة لـ x في المعادلة ومراقبة ماذا سيحدث بعد ذلك. وفيما يلي مجموعة من القيم:

$d_{tot}(-5) = 350$، $d_{tot}(0) = 320$، $d_{tot}(17) = 256$، $d_{tot}(38) = 220$، $d_{tot}(59) = 220$،
$d_{tot}(70) = 240$

إذا استمرينا في تعويض قيم مختلفة لـ x سندرك سريعاً أن أقل قيمة لـ $d_{tot}(x)$ ستكون $d_{tot}(x) = 220$، وذلك عندما تكون x_{min} في أي مكان ضمن الفترة $35 \leq x_{min} \leq 60$. والآن وقد أصبحنا نعرف الإجابة على مسألتنا فمهمتنا هي إثبات هذه التخمينات. كيف يمكننا فعل ذلك؟

المكان الجيد الذي من الممكن أن نبدأ منه البحث عن الإثبات هو أن نرى إذا ما كانت هناك نظرية ما تشبه معادلة $d_{tot}(x)$. هل تعرف نظرية ما تعطينا أقل قيمة ممكنة لمجموع مجموعة من القيم المطلقة؟ إذا كنت لا تعرف يمكنك البحث عن هذه النظرية في أحد المراجع. هناك نظرية مشهورة وهامة تشبه الشيء الذي نحتاجه وهي نظرية المتباينة المثلثية.

نظرية 1.8 لأي مجموعة من الأعداد الحقيقية x_1، x_2، ...، x_n

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \geq |x_1 + x_2 + \ldots + x_n|$$

والمساواة تحدث إذا وفقط إذا كانت جميع قيم x_i لها الإشارة نفسها.

والآن إذا اخترنا x_{min} بحيث تقع في الفترة $35 \leq x_{min} \leq 60$ نستطيع استخدام المتباينة المثلثية مع ترتيب قيم x_i بذكاء بحيث تكون جميعها موجبة (لها الإشارة نفسها)، ومن ثَم نستطيع حذف x_{min} من المتباينة.

$$\begin{aligned}
d_{tot}(x) &= |x_{min}| + |x_{min} - 15| + |x_{min} - 35| + |x_{min} - 60| + |x_{min} - 90| + |x_{min} - 120| \\
&= |x_{min}| + |x_{min} - 15| + |x_{min} - 35| + |60 - x_{min}| + |90 - x_{min}| + |120 - x_{min}| \\
&\geq |x_{min} + x_{min} - 15 + x_{min} - 35 + 60 - x_{min} + 90 - x_{min} + 120 - x_{min}| \\
&= |3x_{min} - 3x_{min} + 220| \\
&= |220| \\
&= 220
\end{aligned}$$

باستخدام المتباينة المثلثية أثبتنا أنه إذا كانت محطة الحافلات موجودة في أي مكان ضمن الفترة $35 \leq x_{min} \leq 60$ فستكون المسافة الإجمالية التي يجب على الأشخاص سيرها للوصول إلى محطة الحافلات أقل ما يمكن، وستكون هذه المسافة تساوي 220 (لا نمتلك أي وحدة ولكن يمكننا على سبيل المثال أن نقول إن المسافة تساوي 220 متراً). تأمل الآن في كيفية حلنا لهذه المسألة، لقد استخدمنا مزيجاً من رسم صورة واختيار تمثيل رياضي مناسب يقوم على تجربة الأرقام للعثور على إجابة، ثم حاولنا البحث عن نظرية تشابه الوضع في المسألة التي بين أيدينا، ثم طوعنا بذكاء النظرية للحصول على أقل مسافة ممكنة. وكما قلنا دائماً الجيدون في حل المسائل الرياضية هم الذين يتسمون بالمرونة.

المسألة التاسعة

القواسم الصحيحة الموجبة

كم عدد القواسم الصحيحة الموجبة للعدد $n = 100702103503502100700 1$ ؟

هذا عدد كبير جدًا، لذا دعنا أولاً ننظر إلى عدد أصغر وليكن العدد 10. القواسم الموجبة الصحيحة للعدد 10 هي: 1، 2، 5، 10، ومن ثَم فإنه يوجد 4 قواسم صحيحة موجبة للعدد 10. والسؤال المطروح هو كيف نجد القواسم الصحيحة الموجبة لأي عدد صحيح موجب؟ مفتاح الحل هنا هو تحليل العدد إلى عوامله الأولية. لنفترض أن $m = 1800$. نستطيع أن نكتب العدد m على صورة حاصل ضرب عوامله الأولية على الصورة:

$$m = 1800 = 2^3.3^2.5^2$$

لذلك فإن أي قاسم d للعدد m يجب أن يكون على الصورة:

$$d = 2^a.3^b.5^c$$

حيث $0 \le a \le 3$ ، $0 \le b \le 2$ ، $0 \le c \le 2$. إذا كانت $a = b = c = 0$ ، فإن $d = 2^0.3^0.5^0 = 1$ هي أيضاً أحد قواسم العدد m . لذلك لدينا أربعة خيارات للعدد a هي $(3,2,1,0)$ ، وثلاثة خيارات للعدد b هي $(2,1,0)$ ، وثلاثة خيارات للعدد c وهي $(2,1,0)$. لذلك فإن العدد الكلي للقواسم الصحيحة الموجبة للعدد 1800 يساوي $4.3.3 = 36$.

وبشكل عام إذا كانت:

$$m = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$$

حيث $p_1, p_2, ..., p_k$ أعداد أولية مختلفة، فإن عدد القواسم الموجبة للعدد m يساوي:

$$(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)$$

لنعد الآن إلى العدد n المعطى في المسألة. إحدى الطرائق لإيجاد عدد القواسم الصحيحة الموجبة للعدد n هي تحليله إلى عوامله الأولية، ومن ثم استخدام الإجراءات السابقة لإيجاد عدد القواسم الصحيحة الموجبة. لكن المشكلة هنا هي أن العدد n كبير جدًّا، وقد يكون من الصعب تحليله إلى عوامله الأولية. لذلك نحتاج للبحث عن طريقة مختصرة للقيام بذلك.

من الواضح أن العدد n يحتوي على الكثير من الأصفار، لذلك من الممكن أن نفكر بكتابة هذا العدد كحاصل جمع مجموعة من الأعداد وذلك اعتماداً على مكان وجود الأصفار وذلك بالطريقة التالية:

$$\begin{aligned} n &= 1007021035035021007001 \\ &= 1000000000000000000000 \\ &+ 7000000000000000000 \\ &+ 21000000000000000 \\ &+ 35000000000000 \\ &+ 35000000000 \\ &+ 21000000 \\ &+ 7000 \\ &+ 1 \end{aligned}$$

أنا لا أحب رؤية كل هذه الأصفار، لأنه سيصبح من الصعب علينا رؤية ما الذي يحدث. لذلك دعنا نستخدم الصيغة العلمية لكتابة العدد n :

$$n = 1.10^{21} + 7.10^{18} + 21.10^{15} + 35.10^{12} + 35.10^{9} + 21.10^{6} + 7.10^{3} + 1.10^{0}$$

يمكننا الآن البحث عن نمط في أسس العدد 10 . لاحظ أن الأسس تنقص بمقدار 3 في كل مرة:

$$21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0$$

والآن لننظر إلى الأعداد:

$$1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$$

ماذا يعني ذلك؟

كلمة السر لحل هذه المسألة يعتمد على فهمنا لهذه المتتالية. هل رأيتها من قبل؟ ربما لا، ولكن وكما قلنا سابقاً في الفصل الرابع فإن أحد المبادئ الأساسية في حل المشكلات هو البحث دائماً عن أرقامك في مثلث باسكال. في الواقع أن المتتالية غير المعروفة التي نبحث عنها ما هي إلا الصف السابع في مثلث باسكال (الصف الأول تم اعتباره الصف رقم صفر).

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5   10  10  5   1
    1   6   15  20  15  6   1
  1   7   21  35  35  21  7   1
```

وفي الحقيقية أن العناصر في الصف رقم k في مثلث باسكال ما هي إلا معاملات ذات الحدين:

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r!(k-r)!} \qquad 0 \le r \le k$$

وهذا يعني أن المتتالية $1,7,21,35,35,21,7,1$ هي المتتالية نفسها:

$$\binom{7}{0},\binom{7}{1},\binom{7}{2},\binom{7}{3},\binom{7}{4},\binom{7}{5},\binom{7}{6},\binom{7}{7}$$

إذاً يمكننا كتابة العدد n على الصورة:

$$n = \binom{7}{0}10^{21} + \binom{7}{1}10^{18} + \binom{7}{2}10^{15} + \binom{7}{3}10^{12} + \binom{7}{4}10^{9} + \binom{7}{5}10^{6} + \binom{7}{6}10^{3} + \binom{7}{7}10^{0}$$

$$= \binom{7}{0}(10^3)^7 + \binom{7}{1}(10^3)^6 + \binom{7}{2}(10^3)^5 + \binom{7}{3}(10^3)^4 + \binom{7}{4}(10^3)^3 + \binom{7}{5}(10^3)^2$$
$$+ \binom{7}{6}(10^3)^1 + \binom{7}{7}(10^3)^0$$

$$= (10^3+1)^7$$

الخطوة الأخيرة جاءت من نظرية ذات الحدين، وهي نظرية مهمة جدًا ويجب عليك مراجعتها باستمرار وذلك لأهميتها في حل الكثير من المسائل الرياضية.

نظرية 1.9

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

والآن وباستخدام نظرية ذات الحدين وبتعويض $a = 10^3, b = 1, n = 7$. نجد أن:

$$n = \left(10^3 + 1\right)^7 = 1001^7$$

والآن أصبحت المسألة الأصلية أسهل بكثير، حيث إننا توصلنا إلى أن:

$$n = 1007021035035021007001 = \left(1001\right)^7$$

وكل ما نحتاجه الآن هو فقط تحليل العدد 1001 على شكل حاصل ضرب عوامله الأولية، وبالمحاولة والخطأ ستجد أن:

$$1001 = 7.11.13$$

ومن ثَم فإن:

$$n = \left(7.11.13\right)^7 = 7^7.11^7.13^7$$

وكنتيجة لذلك فإن عدد القواسم الصحيحة الموجبة للعدد n هو:

$$\left(7+1\right)\left(7+1\right)\left(7+1\right) = 8^3 = 512$$

ومن ثَم فإن عدد القواسم الصحيحة الموجبة للعدد 1007021035035021007001 يساوي 512 .

المسألة العاشرة

خطأ الآلة الحاسبة

جد قيمة المقدار:

$$N = \left(1 - 2.2 \times 10^{-22}\right)^{2.2 \times 10^{22}}$$

تبدو هذه المسألة سهلة، ولكنها توضح خطورة استخدام الآلة الحاسبة أو الكمبيوتر برعونة ودون تفكير. إذا أدخلت هذا المقدار إلى إحدى الآلات الحاسبة فإنها على الأغلب ستعطينا إجابة خاطئة: "1". والأسوأ من ذلك أن العديد من برمجيات الكمبيوتر الخاصة بالجبر سوف تعطينا أيضاً إجابة خاطئة. الإجابة عن هذه المسألة ليست "1"، وهذه الحالة توضح لنا كيف يمكن للثقة العمياء في التكنولوجيا أن تؤدي بنا إلى طريق خاطئ. ولكن لماذا يحدث ذلك؟

جوهر الموضوع في هذه المسألة هو وجود عددين أحدهما كبير $\left(2.2 \times 10^{22}\right)$ والآخر صغير $\left(2.2 \times 10^{-22}\right)$ في نفس المقدار، وهذان العددان يعملان بطريقة معاكسة لبعضها. ولتوضيح هذه الحالة لاحظ أن عدد الجزيئات في لتر واحد من الغاز المثالي عند درجة حراراه $25C$ وضغط جوي 1 يساوي 6.02×10^{23}، وفي المسألة التي بين أيدينا لدينا عدد فلكي كبير 2.2×10^{22} يرافقه عدد متناهٍ في الصغر 2.2×10^{-22}. لذلك فإن معظم الآلات الحاسبة لا تستطيع التعامل مع هذه الحالة. كيف يمكن لنا أن نتناول هذه المسألة؟

إحدى الطرائق للتعامل مع هذه المسألة هي أن نقترب تدريجيًّا من العدد N ونرى ماذا سيحدث. دعونا نستبدل N بالدالة $N(n)$ حيث n عدد صحيح موجب. ومن ثَم يصبح لدينا:

$$N(n) = \left(1 - 2.2 \times 10^{-n}\right)^{2.2 \times 10^{n}}$$

والآن دعونا نعوض بعض القيم الصغيرة للعدد n في الدالة $N(n)$ ، ويمكن لنا أن نستخدم الآلة الحاسبة لمساعدتنا في الحساب:

$$N(1) = 0.0042274771...$$
$$N(2) = 0.0074911424...$$
$$N(3) = 0.0078650072...$$
$$N(4) = 0.0079028448...$$
$$N(5) = 0.0079066331...$$
$$N(6) = 0.0079070119...$$

يظهر لنا بشكل مؤكد من هذه البيانات الرقمية أنه كلما كبرت قيمة n فإن $N(n)$ تقترب تقريباً من 0.0079 . وهذا ما يسميه الرياضيون عملية النهاية (Limit)، وهي مصطلح أساسي في حساب التفاضل والتكامل (Calculus) . وفي الحقيقة فإننا لسنا مهتمين بالتفاضل والتكامل هنا، حيث إن كل ما يهمنا هو إثبات التخمين التالي:

$$\lim_{n \to 22} \left(1 - 2.2 \times 10^{-n}\right)^{2.2 \times 10^{n}} = 0.0079...$$

وكما تعودنا لغاية الآن سنقوم بالنظر إلى الموقف الذي بين أيدينا ونبحث عن نظرية رياضية تتلاءم مع هذا الموقف وتساعدنا في الإجابة عنه. وهذا مثال على الحالة التي تكون فيها معرفتك الرياضية عاملاً حاسماً في الحل. فإذا كنت ترغب حقاً في أن تكون جيداً في حل المشكلات المهمة فإنك لا تستطيع أن تهرب من أهمية معرفتك ببعض الرياضيات، فأنت دائماً ما ستكون بحاجة لمعرفة بعض النظريات الرياضية. إذا كنت لا تعرف النظريات الصحيحة فعليك البحث عنها في كتاب مرجعي جيد. الملحق (B) سيكون مكاناً جيداً لتبدأ منه.

هل يوجد نظرية رياضية تتلاءم أو تشبه المسألة التي أمامنا؟ نعم يوجد، إنها النظرية 1.10:

نظرية 1.10:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x} = \frac{1}{e} \approx 0.367879...$$

العدد e يسمى عدد أويلر (Euler's Number) ويساوي تقريباً ....2.71828 وهو عدد غير نسبي. وهذا العدد يتمتع بأهمية كبيرة وعادةً ما يظهر في كل مكان في الرياضيات. مشكلتنا الآن أصبحت بشكلٍ ما التعامل مع العدد N المعطى في المسألة بحيث يصبح مشابهاً للنظرية 1.10 وذلك من خلال اللجوء إلى القليل من الشعوذة. فيما يلي توضيح لذلك:

$$\begin{aligned} N &= \left(1 - 2.2 \times 10^{-22}\right)^{2.2\times10^{22}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{0.4545 \times 10^{22}}\right)^{2.2\times10^{22}} \\ &= \left(\left(1 - \frac{1}{0.4545 \times 10^{22}}\right)^{0.4545\times10^{22}}\right)^{4.84} \\ &\approx \left(\frac{1}{e}\right)^{4.84} \\ &= 0.00791... \end{aligned}$$

بدلاً من أخذ النهاية عندما x تقترب من اللانهاية (Infinity)، قمنا فقط باستخدام قيمة كبيرة لـ x وهي بالتحديد $x = 0.4545 \times 10^{22}$، ثم استخدمنا النظرية 1.10 لنستنتج أن $\left(1 - \frac{1}{0.4545 \times 10^{22}}\right)^{0.4545\times10^{22}}$ تساوي تقريباً $\frac{1}{e}$. هذه هي الطريقة التي يستخدمها الرياضيون لتقريب الأشياء. إن التقدير والتقريب هي مهارات مهمة في حل المسألة الرياضية، وفيما يلي نظرية أخرى مفيدة جدًّا للقيام بعملية التقريب في الرياضيات:

نظرية 2.10:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e \approx 2.71828....$$

حاول دائماً أن تستخدم النظرية 1.10 والنظرية 2.10 في مسائل التقريب التي تمر معك وخصوصاً عندما تحتوي على أعداد كبيرة جدًّا أو صغيرة جدًّا.

المسألة الحادية عشرة

قناة الجذر

جد أكبر قيمة حقيقية ممكنة للدالة $f(x,y)$

$$f(x,y) = \sqrt{(x-20)(y-x)} + \sqrt{(140-y)(20-x)} + \sqrt{(x-y)(y-140)}$$

حيث إن $-40 \le x \le 100$ ، $-20 \le y \le 200$

تبدو هذه المسألة مؤلمة بشكل يشبه ألم القناة الجذرية لأسنان الإنسان، الفكرة الطبيعية التي قد نفكر بها لحل هذه المسألة هي تربيع طرفي المعادلة على أمل أن نتخلص من هذه الجذور المزعجة، قد تنجح هذه الطريقة، ولكنها من الناحية الجبرية تبدو معقدة. هل يوجد طريقة أفضل؟ دعنا نعود إلى الأساسيات.

ما هو المطلوب في المسألة؟ نريد أن نجد أكبر قيمة حقيقية ممكنة للدالة $f(x,y)$ تحت القيود المعطاة لقيم x ، y . يوجد لدينا العديد من الكلمات المفتاحية، مثل "قيمة حقيقية" تعني أن $f(x,y)$ يجب أن تكون عدداً حقيقيًّا، فنحن لا نستطيع إيجاد قيمة حقيقية للجذر التربيعي للعدد السالب. لماذا؟ لأن الجذر التربيعي للعدد السالب هو عدد تخيلي (Imaginary)، فمثلاً $\sqrt{-5}$ ليست عدداً حقيقيًّا حيث لا يوجد عدد حقيقي مربعه -5 . إذاً نستطيع القول إن مفتاح الحل هو معرفة أننا لا نستطيع أخذ الجذر التربيعي لعدد سالب إذا كانت $f(x,y)$ عدداً حقيقيًّا. وهذا يعني أن جميع المقادير المجذورة (تحت الجذر) يجب أن تكون موجبة أو صفر:

$$(x-20)(y-x) \ge 0$$

$$(140-y)(20-x) \ge 0$$

$$(x-y)(y-140) \ge 0$$

والآن، ما الذي يجب علينا فعله؟ لدينا متباينتين تحتوي كل منهما على $(y-x)$، أو $(x-y)$. حدسنا يخبرنا أنه قد يكون من المهم أن نعرف كيف ترتبط x مع y. إذا عرفنا ذلك قد نتمكن من حذف x (أو y) وتبسيط الدالة $f(x,y)$. دعنا نفعل ذلك.

من المتباينة الأولى لدينا $(x-20)(y-x)(20-x) \geq 0$. وما دام كانت $(x-20) \neq 0$، نستطيع أن نقسم الطرفين على $(20-x)$ لنحصل على $(y-x) \geq 0$، أو $y \geq x$. من المتباينة الثالثة لدينا $(x-y)(y-140) \geq 0$، وما دام كانت $(y-140) \neq 0$، نستطيع أن نقسم الطرفين على $(y-140)$ لنحصل على $x-y \geq 0$، أو $x \geq y$. لذلك فإن $y \geq x$ عندما تكون $x \neq 20$، و $x \geq y$ عندما تكون $y \neq 140$. لكن انتظر قليلاً، لقد بيّنا أن $y \leq x \leq y$ عندما تكون $x \neq 20$، $y \neq 140$، وهذا يعني أن $x = y$ عندما تكون $x \neq 20$، $y \neq 140$.

والآن، عندما $x = y$، فإن تصبح $f(x,y)$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt{(x-20)(x-x)} + \sqrt{(140-x)(20-x)} + \sqrt{(x-x)(x-140)} \\ &= \sqrt{0} + \sqrt{(140-x)(20-x)} + \sqrt{0} \\ &= \sqrt{(140-x)(20-x)} \end{aligned}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على:

$$f^2(x,y) = (140-x)(20-x) = x^2 - 160x + 2800$$

لا تنسى أن $x \neq 20$، $x \neq 140$. عندما $x = y$ تصبح القيود المعطاة في المسألة على النحو الآتي:

$$-40 \leq x \leq 100 \text{ ، } -20 \leq x \leq 200$$

هذان القيدان يجب أن يكون كلاهما صحيحًا، ومع ملاحظة وجود تقاطع بينهما، فإننا نحتاج أن نفحص منطقة التقاطع فقط وهي المنطقة:

$$-20 \leq x \leq 100$$

ولذلك فإن مشكلتنا الآن أن نجد قيمة x التي تعظم (تعطينا القيمة العظمى) لـ:

$$x^2 - 160x + 2800$$

من الواضح أن كثيرة الحدود هذه تصبح أكبر كلما اتجهت قيمة x نحو السالب، وأكبر قيمة سالبة يمكن أن تأخذها x على الفترة: $-20 \le x \le 100$ هي -20 $x =$.

والآن إذا عوضنا $x = y = -20$ في الدالة $f(x,y)$ نحصل على أكبر قيمة حقيقية ممكنة لها:

$$f_{\max}(x,y) = f(-20,-20) = 80$$

تذكر دائماً أن القيود هي صديقك الوفي، ومع أنها تبدو مزعجة في كثير من الأحيان، إلا أنها ستساعدك دائماً على حل مسألتك من خلال تحديد ما هو ممكن.

المسألة الثانية عشرة

اثنان، ثلاثة، خمسة

أوجد أصغر عدد صحيح موجب n بحيث تكون:

$\frac{n}{2}$ مربعاً كاملاً (Perfect Square)، $\frac{n}{3}$ مكعباً كاملاً (Perfect Qube)، $\frac{n}{5}$ للقوة الخامسة الكاملة (Perfect Fifth Power).

عندما تقرأ نص مسألة تطلب منك أن تجد شيئاً ما، سيكون لديك ميل طبيعي لمحاولة حلها. يمكن لك على سبيل المثال أن تأخذ قائمة طويلة من الأعداد الموجبة وتبحث عن العدد الذي يحقق الشروط المعطاة، إذاً حل "الهجوم الغاشم" لهذه المسألة هو القيام ببحث منهجي وشامل عن العدد المطلوب. يمكنك أيضاً أن تكتب برنامج كمبيوتر ليقوم بالبحث في أثناء تناولك وجبة الغداء، المشكلة في هذه الطريقة أنه لا يوجد لدينا أي فكرة عن الوقت الذي نحتاجه للبحث عن هذا العدد الخاص، وقد يكون هذا العدد كبيراً جدًّا، ومن ثَم لا بد لنا أن نبحث عن طريقة أخرى للحل.

خذ التلميح التالي بعين الاعتبار؛ عندما تجد كلمة "أوجد" (Find) استبدلها دائماً بكلمة "بناء" (Build). وبدلاً من محاولة إيجاد العنصر المطلوب، انظر إذا ما كان بإمكانك أن تبنيه، هذه الطريقة تعطيك قدرة أكبر على التحكم بالمسألة. كيف يمكن لنا أن نبني العدد المطلوب في المسألة؟

العبارة التي تشير إلى أن $\frac{n}{2}$ مربع كامل، $\frac{n}{3}$ مكعب كامل، $\frac{n}{5}$ للقوة الخامسة الكاملة تقترح بأن n يقبل القسمة على كل من 2، 3، 5. يمكننا أن نتخيل أن n يقبل القسمة على أعداد أولية أخرى، ولكن المسألة تطلب منا إيجاد أصغر عدد صحيح موجب n يحقق الشروط المطلوبة، لذلك

لسنا بحاجة لجعل العدد أكبر من خلال إضافة عوامل أخرى، ولهذا يمكننا أن نفرض أن العدد المطلوب n سيكون على الشكل التالي:

$$n = 2^a.3^b.5^c$$

حيث a ، b ، c أعداد صحيحة غير سالبة. والآن كل ما نحتاجه هو إيجاد أصغر قيم للأعداد a ، b ، c التي تتوافق مع شروط المسألة.

لاحظ أن:

$$\frac{n}{2} = 2^{a-1}.3^b.5^c$$

$$\frac{n}{3} = 2^a.3^{b-1}.5^c$$

$$\frac{n}{5} = 2^a.3^b.5^{c-1}$$

بما أن $\frac{n}{2}$ يجب أن تكون مربعاً كاملاً، فإن $a-1$ ، b ، c يجب أن تكون جميعها أعدادًا زوجية. أيضاً وبما أن $\frac{n}{3}$ يجب أن تكون مكعباً كاملاً، فإن a ، $b-1$ ، c يجب أن تكون جميعها من مضاعفات العدد 3 . وأخيراً بما أن $\frac{n}{5}$ يجب أن تكون للقوة الخامسة الكاملة، فإن a ، b ، $c-1$ يجب أن تكون جميعها من مضاعفات العدد 5 .

دعنا نلخص الموضوع، يجب أن تكون a من مضاعفات العددين 3 ، 5 في حين أن $a-1$ يجب أن تكون عدداً زوجيًا، ومن ثَم فإن أصغر قيمة للعدد a تحقق هذه الشروط هي $a = 15$. والآن فإن b يجب أن تكون من مضاعفات العددين 2، 5 في حين أن $b-1$ يجب أن تكون من مضاعفات العدد 3، ومن ثَم فإن أصغر قيمة للعدد b تحقق هذه الشروط هي $b = 10$. وفي النهاية يجب أن تكون c من مضاعفات العددين 2 ، 3 في حين أن $c-1$ يجب أن تكون من مضاعفات العدد 5 ، ومن ثَم فإن أصغر قيمة للعدد c تحقق هذه الشروط هي $c = 6$. إذًا لدينا لغاية الآن $a = 15$ ، $b = 10$ ، $c = 6$ ، ومن ثَم فإن العدد الذي نبحث عنه هو:

$$n = 2^{15}.3^{10}.5^6 = 30,233,088,000,000$$

المسألة الثالثة عشرة

مجموع المربعات الخمسة

أثبت أن مجموع مربعات خمسة أعداد صحيحة متعاقبة (Consecutive) لا يمكن أن يكون مربعاً كاملاً (Perfect Square).

هذه المسألة تطلب منا أن نثبت شيئاً ما. الطريقة الجيدة للتعامل مع مثل هذه المسائل هي أن نفرض أن المقدمة المنطقية (الفرضية) (Premise) ممكنة، ثم نبين بعد ذلك أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض. والتناقض في الرياضيات هو استنتاج رياضي لا يمكن أن يكون صحيحاً، وهذا النوع من البرهان – البرهان بالتناقض – تمت مناقشته في الفصل السادس.

دعنا نفرض أن مجموع مربعات خمسة أعداد صحيحة متعاقبة تشكل مربعاً كاملاً. كيف يمكننا كتابة ذلك بطريقة رياضية؟ إذا كان n عدداً صحيحاً، فإن الأعداد الخمسة المتعاقبة هي:

$$n, n+1, n+2, n+3, n+4$$

مجموع مربعات هذه الأعداد الخمسة الصحيحة المتعاقبة يساوي:

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2=5n^2+20n+30$$

يمكننا الآن أن نتعامل مع العبارة $5n^2+20n+30$، حيث لا يوجد أي خطأ في ذلك. ولكن دعنا لا نعتمد كثيراً على هذه الطريقة، ولنبحث عن طريقة أخرى لتمثيل المربعات الخمسة المتعاقبة. إحدى الطرائق الأخرى لتمثيل هذه الأعداد الصحيحة الخمسة المتعاقبة هي:

$$n-2, n-1, n, n+1, n+2$$

لاحظ أن هذا التمثيل متماثل (Symmetrical) حول n، ومن ثَم فإن بعض القيم الموجبة والسالبة قد يلغي كلٌّ منها الآخر، دعنا نرى ماذا سيحدث.

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10$$

لاحظ أن هذه العبارة أبسط من العبارة $5n^2+20n+30$، لذلك دعنا نتعامل مع هذه العبارة الجديدة.

افرض أن مجموع مربعات خمسة أعداد صحيحة متعاقبة هو مربع كامل. ومن ثَم فإنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث:

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10=m^2$$

وبأخذ العدد 5 كعامل مشترك، نحصل على:

$$5(n^2+2)=m^2$$

لاحظ أن العدد 5 عددٌ أوليٌّ، وتخبرنا تمهيدية إقليدس (Euclid's Lemma) أنه إذا قسم عدد أولي حاصل ضرب، فإنه يجب أن يقسم أحد العوامل على الأقل، وبما أن العدد 5 يقسم الطرف الأيسر من العبارة $5(n^2+2)=m^2$، فإنه يجب أن يقسم m^2، ومن ثَم ووفقاً لتمهيدية إقليدس فإن هذا يعني أن 5 تقسم m، أي أنه يوجد عدد صحيح r، بحيث $m/5=r$، وهذا يعطينا أن $n^2+2=m.r$. أيضاً بما أن m من مضاعفات العدد 5، فإن $m.r$ من مضاعفات العدد 5، وهذا يعني أن n^2+2 من مضاعفات العدد 5 . يمكننا الآن أن نستخدم الحساب المقياسي (Modular Arthmetic) – انظر إلى النقاش الآتي – ونكتب ذلك على الصورة: $n^2+2=0(\mathrm{mod}\,5)$، أو على الصورة $n^2=-2(\mathrm{mod}\,5)$، أو على الصورة $n^2=3(\mathrm{mod}\,5)$. كل ما نحتاجه الآن هو أن نثبت أن هذا الشرط الأخير غير ممكن.

كل عدد صحيح n متطابق (Congruent) مع أحد البواقي (Residues) $\{0,1,2,3,4\}$. ومن ثَم يمكننا توصيل كل واحدة من هذه مع n^2، وكتابتها من خلال القياس 5 (modulo 5)، ونرى ماذا يحدث:

$$0^2 \equiv 0 \pmod 5$$

$$1^2 \equiv 1 \pmod 5$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod 5$$

$$3^2 \equiv 9 \equiv 4 \pmod 5$$

$$4^2 \equiv 16 \equiv 1 \pmod 5$$

لا يوجد أي واحدة من هذه متطابقة مع 3 قياس 5 (3 modulo 5) كما هو مطلوب في العبارة $n^2 \equiv 3 \pmod 5$، ومن ثَم فإن هذا مستحيل. أي أن مجموع مربعات خمسة أعداد صحيحة متعاقبة لا يمكن أن يكون مربعاً كاملاً.

الحساب المقياسي قياس m هو تماماً مثل إخبار الوقت من خلال ساعة وفقاً لنظام m ساعة. فالحسابات وفقاً للقياس 12 يشبه قول الوقت من خلال ساعة تعمل وفقاً لنظام 12 ساعة التقليدي، حيث يمكننا أن نعبر عن الساعة 7 من خلال الصورة $7 \pmod{12}$ والتي تقرأ 7 قياس 12 . الساعة 14 التي هي نفسها الساعة 2 مساءً يمكن كتابتها على الصورة $14 \pmod{12} \equiv 2 \pmod{12}$ أو 14 تطابق 2 قياس 12. الساعة 12 هي تماماً مثل الساعة 0، ومن ثَم فإن $12 \equiv 0 \pmod{12}$.

بشكل أساسي فإن $a \equiv b \pmod m$، إذا كانت $a-b$ تقبل القسمة على m، ويمكننا التعبير عن ذلك من خلال القول إن $a-b \equiv 0 \pmod m$. فيما يلي نذكر الخصائص الرئيسية للحساب المقياسي، إذا كانت a، b، c، k أعداداً صحيحة، وكان m عدداً صحيحاً موجباً فإن:

- إذا كان $a \equiv b \pmod m$، فإن $a-b \equiv 0 \pmod m$.
- إذا كان $a \equiv b \pmod m$، فإن $a+c \equiv b+c \pmod m$.
- إذا كان $a \equiv b \pmod m$، فإن $a.k \equiv b.k \pmod m$.
- إذا كان $a \equiv b \pmod m$، و $b \equiv c \pmod m$ فإن $a \equiv c \pmod m$.
- إذا كان $a \equiv b \pmod m$، فإن $b \equiv a \pmod m$.

يمكنك أن تحاول إثبات صحة هذه الخصائص من خلال استخدام التعريف الأساسي الذي ينص على أنه إذا كان $a \equiv b \pmod m$ ، فإن $a-b$ تقبل القسمة على m ، وعلى الرغم من ذلك يجب أن تكون حذراً. بشكل عام فإن قانون الاختصار لا يعمل في الحساب المقياسي، فإذا كان $a.k \equiv b.k \pmod m$ ، فليس بالضرورة أن يكون $a \equiv b \pmod m$. يكون قانون الاختصار صالحاً عندما تكون k و m أوليتان نسبياً، أو لا يوجد بينهما قواسم أولية مشتركة.

المسألة الرابعة عشرة

أوجد القيمة الصغرى

لتكن t, z, y, x أعداداً حقيقية موجبة بحيث:

$$x + y + z + t = 1$$

ما هي القيمة الصغرى (Minimum Value) للمقدار:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z} + \frac{16}{t}$$

إذا لم يسبق لك مشاهدة مسألة مشابهة قد تكون هذه المسألة مخيفة قليلاً. كما تعودنا لنحاول أن نأخذ قسطاً من الراحة مع هذه المسألة عن طريق تعويض بعض الأرقام. لدينا القيود التالية: المتغيرات t, z, y, x يجب أن تكون أعداداً حقيقية موجبة، و $x + y + z + t = 1$. نريد إيجاد القيمة الصغرى للدالة:

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z} + \frac{16}{t}$$

يمكن لنا أن نبدأ بالحالات الصغيرة والخاصة. لاحظ أولاً أن $f(0, 0, 0, 1)$ غير معرفة لأن القسمة على صفر غير معرفة، ولذلك لا يمكن لأي من المتغيرات t, z, y, x أن تأخذ القيمة صفر. الآن ماذا عن الحالة الخاصة:

$$x = y = z = t = \frac{1}{4} = 0.25$$

في هذه الحالة، بالتأكيد فإن:

$$x + y + z + t = 1$$

ومن ثَم فإن:

$$f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=88$$

لذلك فإن القيمة الصغرى للدالة $f(x,y,z,t)$ هي أقل أو يساوي 88 . هل تستطيع فعل ما هو أفضل من ذلك؟ حاول تعويض المزيد من الأعداد وشاهد ماذا سيحدث. في الدالة $f(x,y,z,t)$ الحد $16/t$ هو المسيطر والمتحكم في العبارة. لذلك يجب أن تكون قيمة t كبيرة وليست صغيرة. ومن جهة أخرى يوجد تماثل بين المتغيرين x، وy لذلك يجب أن يكونا متساويين. نستطيع أن نجرب $f\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=64$، وهذا أفضل من 88 . إذا واصلت أخذ توليفات مختلفة من القيم للمتغيرات t,z,y,x ستلاحظ أنه يبدو من المستحيل الوصول إلى قيمة أفضل من 64 كقيمة صغرى للدالة $f(x,y,z,t)$. هل 64 هي القيمة الصغرى المطلوبة؟ كيف يمكننا معرفة ذلك؟

إن إيجاد حل جيد ودقيق لهذه المسألة يشكل تحديًا بدون الاستعانة ببعض المعرفة الرياضية، ولكن ما هي المعرفة الرياضية التي نحتاجها؟ كيف نستطيع تحديد النظرية التي ستساعدنا في حل هذه المسألة من بين العديد من النظريات الرياضية؟

يوجد بعض القرائن والدلائل المطروحة في نص المسألة. أحد القرائن المهمة تتمثل في أن المسألة تطلب منا إيجاد القيمة الصغرى لدالة ما. وبشكل عام فإن المسائل التي تتضمن إيجاد القيم القصوى (العظمى أو الصغرى) تحل بإحدى طريقتين: إما باستخدام حساب التفاضل والتكامل، أو باستخدام المتباينات. إنّ استخدام حساب التفاضل والتكامل بالتأكيد سيكون فعالاً، وذلك لوجود العديد من الطرائق القوية والعامة لحل مسائل الأمثلية (Optimization) مثل طريقة ضوارب لاجرانج (Lagrange Multipliers) . من المرجح أننا نستطيع حل هذه المسألة دون اللجوء لحساب التفاضل والتكامل. لماذا؟ لأن المسائل الرياضية المطروحة في الأولمبياد على الأغلب لا تحتاج لحساب التفاضل والتكامل. إن هذا هو النوع من المعرفة (ما وراء المعرفة) (Meta Knowledge) المتعلقة بطبيعة المسألة وسيكولوجية الشخص الذي وضع المسألة. إن (ما وراء المعرفة) هو نوع جيد من أنواع المعرفة، لذا استخدمها كلما استطعت. وهذا يعني شيئاً واحداً فقط: يجب علينا حل هذه المسألة باستخدام أحد المتباينات، ولكن أي منها ستقدم لنا المساعدة؟

في الرياضيات يوجد العديد من المتباينات، ويتم اكتشاف العديد من المتباينات الجديدة في كل يوم، ولكن القليل منها تستخدم بشكل واسع لحل المسائل اليومية. من هذه المتباينات المهمة متباينة الوسط الحسابي الهندسي التوافقي (Arithmetc-Geometric-Harmonic)، ومتباينة كوشي–شوارز (Cauchy Schwartz). ويوجد كذلك بعض المتباينات الأخرى المهمة ولكن هذه هي المتباينات المستخدمة بكثرة في حل المسائل الرياضية. دعنا نقوم في البداية بعرض هذه المتباينات، ثم بعد ذلك نبحث في نص مسألتنا عن أي أفكار قد تساعدنا في تحديد أي منها أفضل لحل المسألة.

نظرية 1.14 متباينة (AGH)

الوسط الحسابي أكبر أو يساوي الوسط الهندسي الذي بدوره أكبر أو يساوي الوسط التوافقي. وبشكل أكثر دقة:

إذا كانت $a_1, a_2, \cdots, a_n$ أعداداً حقيقية موجبة، فإن:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n)^{1/n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

وتنطبق المساوة إذا كانت جميع القيم متساوية: $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

نظرية 2.14 (كوشي–شوارز)

مربع مجموع حاصل الضرب أقل أو يساوي حاصل ضرب مجموع المربعات. وبشكل أكثر دقة:

إذا كانت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ، و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ جميعها أعداداً حقيقية، فإن:

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)$$

وتنطبق المساواة إذا كانت a_j تتناسب مع b_j لكل $1 \leq j \leq n$.

بالعودة إلى مسألتنا، أي من هاتين المتباينتين علينا أن نستخدم؟ إنّ الملاحظة الرئيسية لدينا هي وجود الأعداد 1، 1، 4، 16 في الدالة:

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z} + \frac{16}{t}$$

وجميعها مربعات كاملة: $1^2=1$ ، $2^2=4$ ، $4^2=16$. ما هي المتباينة التي تستخدم كلمة "تربيع"؟ إنها متباينة كوشي-شوارز. والآن كل ما نحتاجه هو التلاعب قليلاً بمتباينة كوشي-شوارز في محاولة لجعلها مناسبة لحل مسألتنا. وهذا قد يحتاج إلى القليل من التجربة، ولكن فيما يلي سنوضح كيف يمكننا القيام بذلك.

أعد كتابة الدلة $f(x,y,z,t)$ على الشكل:

$$f(x,y,z,t)=\frac{1^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}+\frac{1^2}{\left(\sqrt{y}\right)^2}+\frac{2^2}{\left(\sqrt{z}\right)^2}+\frac{4^2}{\left(\sqrt{t}\right)^2}$$

يمكنك الآن أن تستخدم متباينة كوشي- شوارز:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{y}}\sqrt{y}+\frac{2}{\sqrt{z}}\sqrt{z}+\frac{4}{\sqrt{t}}\sqrt{t}\right)^2\le\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{z}}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{t}}\right)^2\right]$$
$$\bullet\ \left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2+\left(\sqrt{t}\right)^2\right]$$

$$\left(1+1+2+4\right)^2\le\left[\frac{1^2}{x}+\frac{1^2}{y}+\frac{2^2}{z}+\frac{4^2}{t}\right]\left[x+y+z+t\right]$$

$$=\left[\frac{1^2}{x}+\frac{1^2}{y}+\frac{2^2}{z}+\frac{4^2}{t}\right]$$

وفي الخطوة الأخيرة سنستخدم القيد المعطى في المسألة: $x+y+z+t=1$. وأخيراً نجد أن:

$$64\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{4}{z}+\frac{16}{t}$$

تبقى لدينا خطوة واحدة قبل أن نستنتج أن القيمة الصغرى للدالة $f(x,y,z,t)$ هي 64، حيث علينا أن نثبت أنّ القيمة الصغرى 64 يمكن الوصول إليها (موجودة ضمن مدى الدالة). ولكن انتظر! بالفعل لقد قمنا بذلك سابقاً، حيث إننا بينا خلال استكشافنا للمسألة أن:

$$f\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=64$$

وبذلك نكون قد وصلنا للمطلوب.

المسألة الخامسة عشرة

القيمة الصغرى

جد أصغر قيمة (Least Value) للدالة:

$$f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{3y}{z}+\frac{9z}{x}$$

حيث x ، y ، z أعداد حقيقية موجبة.

بعد أن قمنا بحل المسالة 14 ، من المفترض أن تكون هذه المسالة أقل رعباً. ونظراً لأن هذه المسألة تتعلق بالتصغير (Minimization) ، فإننا نعلم أنه بإمكاننا استخدام حساب التفاضل والتكامل أو المتباينات لحلها. بالطبع سوف نستخدم المتباينات في حل هذه المسالة.

عادةً لا يوجد ما يضمن لنا أن دالة ما يوجد لها قيمة صغرى في مجال معين. بعض الدوال مثل $y=\log x$ لا يوجد لها قيمة صغرى لجميع قيم x الحقيقية الموجبة. مع أخذ هذا التحذير بعين الاعتبار ستقوم بحساب قيمة الدالة f عند بعض الأعداد للحصول على مؤشرات حول كيفية سلوكها. في البداية لاحظ أن أيًا من المتغيرات x ، y ، z لا يمكن أن تساوي صفراً. وذلك لأن القسمة على صفر غير معرَّفة. وهذا جيد لأن نص المسألة يخبرنا بأن x ، y ، z يجب أن تكون أعداداً حقيقية موجبة. ولذلك فإن كلًّا من x ، y ، z يجب أن تكون أكبر من صفر. دعنا نجري بعض الحسابات للحالة الخاصة: $x=y=z$. لدينا على سبيل المثال:

$$f(1,1,1)=\frac{1}{1}+\frac{3(1)}{1}+\frac{9(1)}{1}=13$$

وبشكل مشابه فإن:

$$f(0.5,0.5,0.5)=\frac{0.5}{0.5}+\frac{3(0.5)}{0.5}+\frac{9(0.5)}{0.5}=13$$

هل يمكننا القيام بما هو أفضل؟ ربما يمكننا ذلك إذا كانت x ، y ، z غير متساوية. على سبيل المثال:

$$f(3,1,1)=9 \text{ ، } f(2,1,1)=9.5$$

يمكنك التعويض بتوليفات مختلفة من x ، y ، z . ولكن على ما يبدو أن القيمة الصغرى إن وجدت سوف تكون قريبة من العدد 9 . الآن أصبح لدينا إحساس بالمسألة.

إذا كانت القيمة الصغرى هي 9 فإن هذه مساعدة أخرى تشير إلى أنه يجب علينا أن نستخدم المتباينات لحل هذه المسألة. لماذا؟ إذا كانت الدالة $f(x,y,z)$ تحتوي على أعداد صحيحة موجبة مثل 1 ، 3 ، 9 . فإن هذا مؤشر قوي على أن القيمة الصغرى للدالة f هي أيضاً عدد صحيح موجب، مثل 9 الذي هو نفسه من مضاعفات العدد 3 . بعض التوليفات من الأعداد: 1، 3، 9 تؤدي إلى 9 . وهذا دليل واضح على تكامل المنطق الرياضي. مثل هذه الأنماط هي أدلة وقرائن، ويجب أن نتعلم التعرُّف على القليل منها في مسائلنا.

لحل هذه المسالة باستخدام المتباينات، نحن بحاجة إلى تخمين مقصود حول المتباينة المناسبة لمسألتنا. الدالة $f(x,y,z)$ تحتوي الأعداد 1 ، 3 ، 9 . وعلى الرغم من أن 1 ، 9 تمثل مربعات كاملة إلا أن العدد 3 ليس كذلك. هذه الملاحظة لا تستبعد أن لمتباينة كوشي-شوارز دوراً قد تلعبه هنا، وقد تكون مناسبة، لكن متباينة المتوسط الحسابي-الهندسي (نظرية 1.14، المسألة ١٤) قد تكون أفضل ومناسبة أكثر. هنالك سبب آخر يجعل من متباينة المتوسط الحسابي-الهندسي تعمل بشكل أفضل في هذه المسألة وهو أنه عندما نضرب المقادير: $\frac{x}{y}$ ، $\frac{3y}{z}$ ، $\frac{9z}{x}$ ببعضها فإنه سوف تحذف المتغيرات x ، y ، z .

تشير النظرية 1.14 إلى أن المتوسط الحسابي أكبر من أو يساوي المتوسط الهندسي، والمساواة تتحقق عندما تكون جميع الحدود متساوية. وهذا يعطينا ما يلي:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{3y}{z}+\frac{9z}{x}\right)\geq\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{3y}{z}\cdot\frac{9z}{x}\right)^{\frac{1}{3}}=(27)^{\frac{1}{3}}=3$$

وهذا يعني أن:

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{3y}{z}+\frac{9z}{x}\right)\geq 9$$

رأينا مسبقاً عندما قمنا ببعض الحسابات العددية أن $f(3,1,1)=9$. لذلك فإن العدد 9 هو القيمة الصغرى للدالة $f(x,y,z)$ عندما تكون x ، y ، z أعداداً حقيقية موجبة.

لنفترض أن اختبارنا التجريبي لم يكشف لنا أن $f(3,1,1)$ هي القيمة الصغرى للدالة $f(x,y,z)$. كيف يمكن لنا أن نجد قيم x ، y ، z التي تعطينا القيمة الصغرى (على افتراض أن القيمة الصغرى موجودة بالفعل)؟ فيما يلي إحدى الطرائق لتحليل هذه المسألة.

متباينة المتوسط الحسابي - الهندسي تخبرنا أن المساواة تتحقق عندما تكون جميع الحدود متساوية. وهذ يعني أننا نريد أن نصل إلى أن:

$\frac{x}{y}=\frac{3y}{z}=\frac{9z}{x}=r$ ، حيث r عدد حقيقي موجب

ونحن نعرف كذلك أن:

$$r^3=\frac{x}{y}\cdot\frac{3y}{z}\cdot\frac{9z}{x}=27$$

ومن ثَم فإن $r=3$. وهذا يقودنا إلى حل ثلاث معادلات:

$$\frac{9z}{x}=3\ \text{،}\ \frac{3y}{z}=3\ \text{،}\ \frac{x}{y}=3$$

يوجد عدد لانهائي من الحلول لهذا النظام من المعادلات. أحد هذه الحلول هو: $x=3$ ، $y=1$ ، $z=1$ الذي يعطينا أن $f(3,1,1)=9$ ، ومن ثَم لدينا القيمة الصغرى المطلوبة.

عادةً ما تطلب منا مسائل الأمثلية أن نجد القيمة العظمى أو الصغرى لشيء ما ضمن قيود محددة. وهذه المسائل يتم حلها عادةً بالطرائق الرياضية المتقدمة من خلال حساب التفاضل والتكامل

(مثل طريقة ضوارب لاجرانج). ومع ذلك فإنه يمكن حل مثل هذه المسائل في الغالب بشكل أنيق باستخدام المتباينات، كما فعلنا في مسألتنا السابقة.

هناك بعض التنبيهات التي يجب مراعاتها عند حل مسائل الأمثلية. أولاً: يجب إثبات أن القيمة القصوى (العظمى أو الصغرى) موجودة بالفعل. ثانياً: يجب التحقق من أن الإجابة تحقق جميع القيود المعطاة. وأخيراً يجب أن نضع في اعتبارنا أن القيمة المثلى – إن وجدت – قد لا تكون وحيدة. فقد يكون هنالك العديد من القيم مثل x ، y ، z التي تعطينا النتيجة المطلوبة.

المسألة السادسة عشرة

مجموع كلاسيكي

اكتب المجموع:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}$$

على شكل كسر مكتوب بأبسط صورة ممكنة (Lowest Terms).

بعض المسائل الرياضية يمكن حلها بسهولة إذا كنا نعرف خدعة أو حيلة خاصة، والكثير من الرياضيين يمتلكون في جعبتهم العديد من الخدع الخاصة التي تعلموها على مدى سنوات. إذا كنت لا تعرف الخدعة المناسبة لمسألة ما قد لا تفكر في حلها من الأساس، أما إذا كنت تعرف الخدعة فيمكنك استخدامها لحل مجموعة واسعة من المسائل المشابهة. في هذه المسألة سنبدأ باستخدام الطرائق التقليدية والقياسية، ثم سنحل المسألة باستخدام خدعة معينة عادةً ما تنجح في حل المسائل المتعلقة بإيجاد المجاميع، وهذا سوف يعدنا للدخول بشكل جيد في المسألة التالية (المسألة ١٧) حيث سنستخدم الخدعة الخاصة بالمجموع في حل مسألة أكثر صعوبة.

للمزيد من التبسيط دعونا نسمي المجموع المعطى في المسألة $S(99)$. وقد تدهش من ذلك وتتساءل لماذا لم نسمِّ المجموع $S(100)$؟ حسناً، بإمكانك القيام بذلك، فالأمر يتعلق بما تفضله. وعندما تفكر في الرياضيات كنوع من الفنون، تدرك أنه بإمكانك النظر إلى اللوحة من الزاوية التي تريدها وتفضلها. المجموع الوارد في المسألة يتكون من 99 حداً، ولكن من الجيد دائماً أن نعمم الأشياء، لذا دعنا نأخذ المجموع العام لـ n من الحدود:

$$S(n)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

هذه المسألة يمكن حلها باستخدام "الهجوم الغاشم" وذلك من خلال استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد المجموع $S(99)$، وهذا سينجح ولكنه سيكون مملاً ولا يتوفر على أي نوع من المتعة. دعنا نرى ماذا يمكننا أن نفعل غير ذلك.

دعنا ننظر إلى الحالات الصغيرة، يمكنك أن تجد مجموع عدد من المجاميع الجزئية (Partial Sums):

$$S(1)=\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}$$
$$S(2)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}=\frac{2}{3}$$
$$S(3)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}=\frac{3}{4}$$

من خلال التدقيق في هذه القيم القليلة لـ $S(n)$، يبدو أن النمط قد بدأ يظهر. تخميننا هو أن:

$$S(n)=\frac{n}{n+1}$$

كيف يمكن لنا أن نثبت هذا التخمين؟ إحدى الطرائق للقيام بذلك هي استخدام الاستقراء الرياضي الذي ناقشناه في الفصل السادس.

نريد أن نثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أن:

$$S(n)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

في البداية، دعنا نثبت صحة هذه الصيغة عندما $n=1$. لاحظ أن:

$$S(1)=\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}$$

ومن ثَم فإن الصيغة صحيحة عندما $n=1$. بعد ذلك علينا أن نثبت أنه إذا كانت $S(n)=\frac{n}{n+1}$، فإن $S(n+1)=\frac{n+1}{n+2}$. للقيام بذلك افرض أن $S(n)=\frac{n}{n+1}$، وخذ مجموع $S(n+1)$، وحاول أن ترى إذا ما كان $S(n+1)=\frac{n+1}{n+2}$. وفيما يلي الإثبات، لكن حاول أن تقوم به بنفسك.

$$\begin{aligned}S(n+1) &= \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &= S(n)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{1}{n+1}\left(n+\frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n^2+2n+1}{n+2}\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{(n+1)(n+1)}{n+2}\right)\\ &= \frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

الآن، وبعد أن أثبتنا أن $S(n)=\frac{n}{n+1}$، نستطيع على الفور حل مسألتنا. الجواب هو $S(99)=\frac{99}{100}$، وهذا الكسر لا يمكن تبسيطه أكثر من ذلك.

والآن يبدو أننا قمنا بحل المسألة بطريقة صعبة نوعاً ما، دعنا نتعلم هذه الخدعة الصغيرة، والتي عادةً ما تساعد في حل الكثير من المسائل المتعلقة بالمجاميع، ومن ثَم من الجيد أن تعرفها وتطَّلع عليها، ويطلق على هذه الخدعة اسم خدعة المجموع المتداخل (Telescoping Sum).

افرض أننا استطعنا أن نكتب مجموعاً معيناً نريد أن نبسطه على الصورة:

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(f(k+1)-f(k)\right)$$

حيث $f(k)$ دالة معينة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (أو أحياناً غير السالبة). لاحظ ماذا يحدث عندما نقوم بجمع الحدود، على الأغلب ستحذف معظم الحدود ويتبقى لدينا نتيجة سهلة:

$$\begin{aligned}S(n) &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(f(k+1)-f(k)\right)\\ &= f(n)-f(n-1)+f(n-1)-f(n-2)+\ldots-f(2)+f(2)-f(1)\\ &= f(n)-f(1)\end{aligned}$$

حسناً، هذا مدهش! والآن وبالنسبة لمسألتنا لاحظ أن كل حد من حدود المجموع $S(n)$ له الشكل التالي:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

فمثلاً:

$$\frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

يمكننا أن نستخدم الرموز الرياضية، ولكن دعنا نستخدم الأعداد لنرى ما الذي يحدث:

$$\begin{aligned} S(99) &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{100} \\ &= \frac{99}{100} \end{aligned}$$

إذا استخدمت خدعة المجموع المتداخل بطريقة ناجحة فإنها توفر الكثير من الوقت والجهد، والجزء الصعب في استخدامها هو قدرتنا على تمثيل المجموع المعطى في مسألتنا على الصورة $S(n) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(f(k+1) - f(k)\right)$. إذا تمكنت من القيام بذلك؛ فلا شيء سيمنعك من حل مسألتك.

المسألة القادمة (مسألة 17) أصعب بكثير من هذه المسألة، ولكنها تظهر بشكل واضح قوة خدعة المجموع المتداخل.

المسألة السابعة عشرة

مقلوب المجموع

لتكن $\{a_n\}$ متتالية من الأعداد الطبيعية معرفة من خلال العلاقة الارتدادية التالية: (Recurrence Relation)

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2$$
$$a_0 = 1, \; a_1 = 213$$

إذا كان المجموع غير المنتهي (Infinite Sum) $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i-1}}{a_i^2 - a_{i-1}^2}$. أوجد قيمة $1/S$

أحد الطرائق التي تساعدنا على الإحساس بهذه المسألة هي تعويض بعض الأعداد في المجموع S ، ثم نرى بعد ذلك ماذا سيحدث. بما أن المجموع S مكون من عدد غير منته من الحدود، فإننا نستطيع فعليًّا حساب مجموع أول عدة حدود، ولكن إذا كانت S تتقارب بسرعة كبيرة – لنفترض ذلك – فإن حساب مجموع أول عدة حدود قد يعطينا فكرة ما عن القيمة النهائية للمجموع غير المنتهي. لنبدأ بالتعويض:

حيث إن $a_1 = 213$ ، $a_0 = 1$ ، وبما أن $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ ، يمكننا حساب a_2 كما يلي:

$$a_2 = 2a_1 + a_0 = 2(213) + 1 = 427$$

والآن نحن نعرف قيمة a_1 ، a_2 . وبالتالي يمكننا إيجاد قيمة a_3

$$a_3 = 2a_2 + a_1 = 2(427) + 213 = 1067$$

من خلال الاستمرار بهذه الطريقة يمكننا أن نرى أن أول عدة قيم لـ a_n هي:

$$\{1, 213, 427, 1067, 2561, 6189, 14939, 36067, 87073, \ldots\}$$

الآن يمكننا أن نستخدم هذه القيم من a_n في إيجاد المجموع الجزئي S_8 :

$$\begin{aligned} S_8 &= \sum_{i=1}^{8} \frac{a_{i-1}}{a_i^2 - a_{i-1}^2} = \frac{a_0}{a_1^2 - a_0^2} + \frac{a_1}{a_2^2 - a_1^2} + \ldots + \frac{a_7}{a_8^2 - a_7^2} \\ &= \frac{1}{213^2 - 1^2} + \frac{213}{427^2 - 213^2} + \ldots + \frac{36067}{87073^2 - 36067^2} \\ &\approx 0.00235 \end{aligned}$$

إذا كانت S_8 تساوي تقريباً 0.00235 ، فإن $1/S_8$ تساوي تقريباً:

$$\frac{1}{S_8} \approx \frac{1}{0.00235} \approx 425.5$$

وبفرض أن المجموع غير المنتهي S يتقارب (Converges)، فيبدو أن $1/S$ تساوي تقريبا 425 (وهذا مجرد توقع).

من الطرق المعروفة في إيجاد المجاميع الطريقة المتداخلة (Telescoping Method) والتي درسناها في المسألة (16)، لنحاول أن نستخدم هذه الطريقة في هذه المسألة. جميع المقامات في S لها الشكل $a_i^2 - a_{i-1}^2$ وبما أن $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ ، فمن الطبيعي أن نقوم بتحليل المقام لنحصل على:

$$\frac{a_{i-1}}{a_i^2 - a_{i-1}^2} = \frac{a_{i-1}}{(a_i - a_{i-1})(a_i + a_{i-1})}$$

وقد وضحنا في المسألة (16) أن:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}$$

وفي مسألتنا هذه نحتاج أن نقوم بشيء مماثل. نحتاج أن نكتب شيئاً ما يشبه الشكل التالي:

$$\frac{a_{i-1}}{a_i^2 - a_{i-1}^2} = \frac{a_{i-1}}{(a_i - a_{i-1})(a_i + a_{i-1})} = \frac{A}{a_i - a_{i-1}} - \frac{B}{a_i + a_{i-1}}$$

وهذه حالة تقليدية لاستخدام طريقة الكسور الجزئية Partial Fractione . ومن خلال الضرب بالمقدار $(a_i - a_{i-1})(a_i + a_{i-1})$ نحصل على:

$$\begin{aligned} a_{i-1} &= A(a_i + a_{i-1}) - B(a_i - a_{i-1}) \\ &= (A-B)a_i + (A+B)a_{i-1} \end{aligned}$$

وهذا يعني أن $A - B = 0$ ، بينما $A + B = 1$. وبالتالي فإن $A = B = 1/2$. والآن لدينا:

$$\frac{a_{i-1}}{a_i^2 - a_{i-1}^2} = \frac{a_{i-1}}{(a_i - a_{i-1})(a_i + a_{i-1})} = \frac{1}{2(a_i - a_{i-1})} - \frac{1}{2(a_i + a_{i-1})}$$

هذه الصيغة الأخيرة ليست متداخلة (تلسكوبية)، ولكن يمكننا تحويلها إلى الشكل المطلوب من خلال استخدام العلاقة الارتدادية المعطاة على الشكل $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$، أو $a_{n+1} - a_n = a_n + a_{n-1}$. والآن ومن خلال تعويض هذه القيم في العبارة السابقة، نحصل على:

$$\frac{a_{i-1}}{a_i^2 - a_{i-1}^2} = \frac{a_{i-1}}{(a_i - a_{i-1})(a_i + a_{i-1})} = \frac{1}{2(a_i - a_{i-1})} - \frac{1}{2(a_{i+1} - a_i)}$$

والآن أصبح المجموع S متداخلاً. وهذا يعني أن معظم حدود S سوف تلغي بعضها بعضاً (إذا وجدت صعوبة في رؤية ذلك، عوض مجموعة من الأعداد a_i في التعبير التالي:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i-1}}{a_i^2 - a_{i-1}^2} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2(a_i - a_{i-1})} - \frac{1}{2(a_{i+1} - a_i)} \right) \\ &= \frac{1}{2(213 - 1)} \\ &= \frac{1}{424} \end{aligned}$$

وبما أن $S = \frac{1}{424}$، فإن $\frac{1}{S} = 424$.

لاحظ أن توقعنا الأولي باستخدام البيانات العددية كان يشير إلى أن $\frac{1}{S}$ تساوي تقريباً 425 أو 426 ولكن ذلك لأننا استخدمنا فقط ثمانية من حدود المجموع S . ولكن الجواب الحقيقي هو 424 وذلك لأن S تحتوي على عدد غير منته من الحدود كما ذكر في المسألة.

لاحظ أن توقعنا الأولي باستخدام البيانات العددية كان يشير إلى أن $\frac{1}{S}$ تساوي تقريباً 425 أو 426 ولكن ذلك لأننا استخدمنا فقط ثمانية من حدود المجموع S . ولكن الجواب الحقيقي هو 424 وذلك لأن S تحتوي على عدد غير منته من الحدود كما ذكر في المسألة.

المسألة الثامنة عشرة

منطق الأيام

ما هو اليوم الذي يأتي قبل يوم محدد بيومين، والذي يأتي بدوره بعد ثلاثة أيام بعد اليوم الذي يسبق يوم الثلاثاء؟

من الواضح أن هذه المسألة تتعلق بالمنطق، ويمكن لك من خلال المحاولة والخطأ معرفة اليوم المطلوب. الشيء الذي يجعل هذه المسألة تبدو صعبة هو الصياغة اللغوية المعقدة للمسألة، ويمكن جعل مثل هذه المسائل أكثر سهولة من خلال إعادة صياغتها على شكل مسألة رياضية.

بشكل أساسي نحتاج إلى تحويل هذه المسألة الكلامية إلى مسألة عددية. في البداية دعنا نحدد رقم معين لكل يوم من أيام الأسبوع. ليكن يوم الأحد (= 0)، والاثنين (= 1)، والثلاثاء (= 2)، والأربعاء (= 3)، والخميس (= 4)، والجمعة (= 5)، والسبت (= 6). دعنا الآن نقوم بعملية ترميز لكلمتي "قبل" و "بعد". إذا كانت D تمثل القيمة العددية لأحد الأيام، فإن $D-1$ تمثل اليوم الذي يأتي قبل اليوم D، بينما $D+1$ تمثل اليوم الذي يأتي بعد اليوم D. أي أن كلمة "قبل" تعبر عن العدد (-1) وكلمة "بعد" تعبر عن العدد (+1). نحن الآن بحاجة فقط إلى تحديد أماكن ظهور كلمتي "قبل" و "بعد" في نص المسألة.

لتكن D تعبر عن اليوم المطلوب. يمكننا تقسيم المسألة إلى عدة أجزاء من خلال التركيز على كلمتي "قبل" و "بعد" كما يلي:

$D =$ (الثلاثاء) + (اليوم الذي قبل) + (يومان قبل) + (يوم بعد) + (اليوم الذي يأتي بعد ٣ أيام)

يمكننا كتابة هذه المعادلة بصورة رقمية من خلال تذكر أن الثلاثاء $(=2)$، وقبل $(=-1)$، وبعد $(=1)$:

$$\begin{aligned} D &= -2+1+3-1+2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

وبما أن الأربعاء $(=3)$، فإن الجواب لهذه المسألة هو "الأربعاء".

لاحظ كيف أن المسائل المتعلقة بالمنطق تصبح أكثر سهولة عندما نقوم بتحويلها إلى مسألة عددية. الآن وباستخدام هذه الطريقة يمكننا أن نتعامل مع مسائل مشابهة أكثر تعقيداً بكثير.

المسألة التاسعة عشرة

أسس زوجية

إذا قمنا بفك (توسيع) العبارة:

$$\left(x^2+2x-1\right)^8$$

ما هو مجموع معاملات الحدود ذات الأسس الزوجية لـ x ؟

أحد الطرق لحل هذه المسألة هي استخدام نظرية متعددة الحدود (Multinomial Theorem) وتطبيقها على العبارة $\left(x^2+2x-1\right)^8$، ومن ثم إيجاد قيمة مجموع متعددة الحدود (Multinomial Sum) الناتجة لمعاملات x ذات الأسس الموجبة. وعلى الرغم من توفر الآليات الرياضية للقيام بذلك، إلا أن هذا يبدو وكأنه يحتاج الكثير من العمل غير الضروري.

دعنا نبدأ بحل "الهجوم الغاشم" لهذه المسألة، فهذا قد يعطينا بعض المقترحات والرؤى التي قد تساعدنا في الوصول إلى حل جيد. بما أن العبارة $\left(x^2+2x-1\right)$ مرفوعة للأس ثمانية الذي لا يعتبر عدداً كبيراً جداً، يمكننا ببساطة أن نجد حاصل ضرب كثيرات الحدود، ثم نحدد معاملات الحدود ذات الأسس الزوجية لـــ x ونقوم بجمعها. هذه العملية تحتاج إلى ثواني معدودة للقيام بها إذا استخدمنا آلة حاسبة جيدة مثل الآلات من النوع تكساس T1-89.

$$\begin{aligned}\left(x^2+2x-1\right)^8 = {} & x^{16}+16x^{15}+104x^{14}+336x^{13}+476x^{12}\\ & -112x^{11}-1064x^{10}-432x^9+1222x^8\\ & +432x^7-1064x^6+112x^5+476x^4\\ & -336x^3+104x^2-16x+1\end{aligned}$$

والآن أصبح حل المسألة بسيط، حيث نجمع معاملات الحدود ذات الأسس الزوجية لنحصل على:

$$1+104+476-1064+1222-1064+476+104+1=256$$

على الفور، يجب عليك أن ترى نمطاً ما في هذه الإجابة. هذا مثال كلاسيكي يوضح كيف أن معرفة جواب المسألة سيساعدنا دائماً على الوصول إلى حل. لماذا؟ العدد 256 يمكن كتابته على شكل قوة للعدد 2، حيث أن $2^8 = 256$. إذا كنت تريد أن تكون جيداً في حل المسائل الرياضية، من الجيد أن تتقن العديد من المتتاليات العددية المختلفة، مثل متتالية قوى العدد 2. حقيقة أن مجموع معاملات الحدود ذات الأسس الزوجية لـ x هو 256، أو 2^8 يعتبر أمراً مدهشاً، وذلك لأن كثيرة الحدود $\left(x^2+2x-1\right)^8$ هي أيضاً مرفوعة للأس 8.

الآن دعنا نلقي نظرة على بعض الحالات الخاصة. للتبسيط دعنا نفرض أن:

$$f(x)=\left(x^2+2x-1\right)^8$$

وبالتالي فإن:

$$f(-1)=(-2)^8=256 \text{ ، } f(1)=(2)^8=256$$

من الواضح أن هناك شيئاً ما مثيراً للاهتمام حول $f(1)$، $f(-1)$. هذه الملاحظة قد تشير إلى احتمالية وجود حل ذكي وبسيط لهذه المسألة.

دعنا نعود إلى الأساسيات، إذا قمنا بفك $f(x)$ كما فعلنا في حلنا التقليدي، سنحصل على كثير حدود من الدرجة 16. وكما رأينا سابقاً، فإن أمراً غريباً يحدث يتعلق بـ $f(1)$، $f(-1)$، حيث أن كليهما يساوي 256، والعدد 256 هو حل للمسألة. لذلك، دعنا نستكشف كثيرات حدود أكثر بساطة مثل $h(x)$، ونرى ماذا سيحدث بخصوص $h(1)$، $h(-1)$.

افرض أن:

$$h(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \text{ ، حيث } a\neq 0$$

إذاً:

$$h(1) = a + b + c + d + e$$

$$h(-1) = a - b + c - d + e$$

الآن دعونا نتعامل مع هذين المقدارين. إذا جمعنا $h(1)$ و $h(-1)$، نحصل على:

$$h(1) + h(-1) = 2a + 2c + 2e$$

هذا مدهش، حيث أن هذا المجموع يساوي ضعف مجموع معاملات الحدود ذات الأسس الزوجية لــ x . هذا تماماً هو الشيء الذي نحتاجه لحل مسألتنا. اذا قسمنا طرفي المعادلة على العدد 2 ، سوف نرى أن مجموع معاملات الحدود ذات الأسس الزوجية لــ x يساوي:

$$a + c + e = \frac{h(1) + h(-1)}{2}$$

لقد اكتشفنا طريقة رائعة لحل مسألتنا الاصلية. إن مجموع معاملات الحدود ذات الأسس الزوجية لــ x في مفكوك $f(x) = \left(x^2 + 2x - 1\right)^8$ هو

$$\frac{f(1) + f(-1)}{2} = \frac{\left(1^2 + 2.1 - 1\right)^8 + \left(\left(-1\right)^2 + 2.\left(-1\right) - 1\right)^8}{2} = \frac{2^8 + \left(-2\right)^8}{2} = 256$$

حسناً، دعنا نلخص اكتشافنا هذا على شكل نظريات مفيدة:

نظرية 1.19 إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود، فإن مجموع معاملات الحدود ذات الأسس الزوجية لــ x يعطى بالعلاقة

$$\frac{f(1) + f(-1)}{2}$$

نظرية 2.19 إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود، فإن مجموع معاملات الحدود ذات الأسس الفردية لــ x يعطى بالعلاقة:

$$\frac{f(1) - f(-1)}{2}$$

غالباً ما تقودنا عملية استكشاف المسألة إلى بعض الرؤى الثاقبة التي تسمح لنا بالوصول إلى الحل الذكي. علاوة على ذلك، استنتجنا من خلال الاستكشاف الرياضي بعض النتائج المهمة التي يمكن صياغتها على شكل نظريات مفيدة. إذا اكتشفت شيئاً مثيراً للاهتمام خلال حل المسألة الرياضية، لا تخف من القول إن هذا مجرد تخمين، حاول إثبات ذلك التخمين على أنه نظرية، هذه هي الطريقة التي عادةً ما يتم بها اكتشاف الرياضيات الجديدة.

المسألة العشرون

رمي قطعة نقد معدنية

لدى رمي 25 قطعة نقد متوازنة وبشكل مستقل كل منها عن الأخرى، فما هو العدد المتوقع لأزواج الصور المتتالية؟

كما هو ملاحظ فإن هذه المسألة تتضمن رمي قطعة نقد، ولقطعة النقد المتوازنة وجهان، أحدهما يسمى صورة H، فيما يسمى الأخر شعار T. الآن إذا قمت برمي قطعة نقد متوازنة فإن الناتج الظاهر للأعلى سيكون إما صورة أو شعاراً، وبما أننا نرمي قطع نقد مستقلة عن بعضها، فإن نتيجة كل قطعة لن تتأثر بنتيجة القطعة الأخرى، ومن ثَم فإن رمي 25 قطعة نقد متوازنة وبشكل مستقل كل منها عن الأخرى يكافئ رمي قطعة نقد متوازنة لخمس وعشرين مرة متتالية.

وللتأكد أننا فهمنا المسألة بشكل جيد، دعنا نرمي قطعة نقد متوازنة (25) مرة متتالية ونرى ماذا سيحدث. فيما يلي أحد النتائج المحتملة لهذه التجربة:

$$H\ H\ T\ H\ T\ T\ T\ H\ H\ H\ H\ H\ T\ T\ H\ H\ H\ T\ H\ T\ T\ H\ H\ T\ H$$

في هذه التجربة الخاصة، عدد أزواج الصور المتتالية (HH) يساوي 8، حيث نقوم فقط ومن اليسار إلى اليمين بحساب عدد مرات وجود صورتان بجانب بعضهما.

عدد أزواج الصور المتوقع الحصول عليها (HH) عند رمي (25) قطعة نقد هو متوسط عدد أزواج الصور الذي سيظهر إذا أجرينا هذه التجربة لملايين المرات.

قد يصعب علينا حل هذه المسألة، ولكننا سنستخدم استراتيجية غالباً ما تكون مفيدة عند التعامل مع هذا النوع من المسائل. أولاً: دعنا نعرف الدالة $E(n)$ والتي تعدُّ الإجابة عن مسألتنا،

ثانياً: سنستخدم استراتيجية "فرق تسد" لعزل النتائج على شكل حالات منفصلة ومختلفة، ثالثاً: سنستخدم كل حالة من هذه الحالات لبناء صيغة ارتدادية لـ $E(n)$، وأخيراً سنحل المسألة لإيجاد $E(n)$ باستخدام أي طريقة مناسبة. وفي هذه المسألة سنستخدم صديقنا القديم طريقة المجموع المتداخل (Telescoping Sum Method) لإيجاد $E(n)$. وتوضح هذه المسألة بشكل جميل كيف ينطوي حل المسألة الرياضية على تناول العديد من الأفكار والطرق المختلفة في المسألة نفسها.

لتكن $E(n)$ تمثل عدد أزواج الصور المتوقع (HH) عند رمي قطعة نقد n من المرات. نحن الآن نبحث عن إيجاد $E(25)$، وهذا سيكون جواباً لمسألتنا. لغاية الآن ليس لدينا أي فكرة عن ماهية $E(n)$، ولكننا سنقوم ببناء علاقة ارتدادية تعبر عن $E(n+1)$ بدلالة $E(n)$، حيث تُعدّ العلاقات الارتدادية أداة رياضية قوية لحل المسائل في الرياضيات.

نحن أيضًا بحاجة للبدء بطريقة ما. من الواضح أنه إذا قمنا برمي قطعة نقد مرة واحدة، فلن يكون هناك أزواجاً متتالية، لذلك فإن $E(1) = 0$، ومن المعروف أن العلاقات الارتدادية تحتاج دائماً إلى توفر عنصرين: علاقة أو علاقات ارتدادية تعبر عن $E(n+1)$ بدلالة $E(n)$، وشرطاً ابتدائيًّا (Initial Condition) مثل $E(1) = 0$، حيث أنه لا بد من توفر بعضاً من الشروط الابتدائية لعلاقتك الارتدادية.

والآن يمكننا استخدام استراتيجية "فرق تسد" لعزل النتائج على شكل حالات منفصلة ومختلفة. افرض أننا قمنا بالفعل برمي قطعة النقد المتوازنة n من المرات، فعندئذ إذا قمنا برمي القطعة مرةً أخرى، فسيكون لدينا ثلاث حالات متمايزة:

الحالة ١ الحصول على صورة (H) في الرمية رقم $n+1$، مع فرض أن نتيجة الرمية السابقة كانت أيضاً صورة (H). إذا حدثت هذه الحالة فإن عدد أزواج الصور (HH) سيزداد بمقدار 1. احتمالية حدوث هذه الحالة يساوي $(1/4)$ لأن احتمالية حدوث الزوج (HH) يساوي $(1/2)(1/2) = 1/4$. تذكّر أنه عند رمي أي قطعة نقد فإن احتمال الحصول على صورة يساوي $(1/2)$، واحتمال الحصول على شعار يساوي $(1/2)$ أيضاً.

الحالة ٢. الحصول على صورة (H) في الرمية رقم $n+1$، مع فرض أن نتيجة الرمية السابقة كانت شعاراً (T). إذا حدثت هذه الحالة فإن عدد أزواج الصور (HH) لن يتغير، ولا تضيف هذه الحالة شيئاً إلى أزواج الصور (HH)، وبالتالي فإن احتمالية حدوث هذه الحالة يساوي $(1/4)$.

الحالة ٣. الحصول على شعار (T) في الرمية رقم $n+1$، مع فرض أن نتيجة الرمية السابقة كانت إما صورة (H) أو شعار (T). وهذه الحالة أيضاً لا تضيف شيئاً إلى أزواج الصور (HH)، واحتمالية حدوثها تساوي $(1/2)$. لاحظ أن احتمالية حدوث (HT) يساوي $(1/4)$، واحتمالية حدوث (TT) يساوي $(1/4)$، وبالتالي فإن احتمالية حدوث الحالة الثالثة يساوي $(1/4+1/4=1/2)$.
من خلال وضع هذه الحالات الثلاث معاً، نستطيع بناء علاقة ارتدادية لـ $E(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
E(n+1) &= \frac{1}{4}\left(E(n)+1\right)+\frac{1}{4}\left(E(n)+0\right)+\frac{1}{2}\left(E(n)+0\right) \\
&= \mathrm{E}(n)+\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

وهذا يعني أنه في المتوسط فإنه في ربع عدد المرات، فإن الرمية رقم $n+1$ تزيد عدد أزواج الصور (HH) من $E(n)$ إلى $E(n)+1$، بينما في ثلاثة أرباع عدد المرات $(1/4+1/2)$ فإن الرمية رقم $n+1$ لا تزيد عدد أزواج الصور (HH). وبالتالي فإن عدد أزواج الصور (HH) يبقى $E(n)$ أو $E(n)+0$.

والآن كل ما علينا القيام به هو حل العلاقة الارتدادية:

$$
E(n+1)=\mathrm{E}(n)+\frac{1}{4}
$$

بالنسبة إلى $\mathrm{E}(n)$. للقيام بذلك سنقوم بكتابة العلاقة الارتدادية على الشكل التالي:

$$E(n+1)-E(n)=\frac{1}{4}$$
$$E(n)-E(n-1)=\frac{1}{4}$$
$$E(n-1)-E(n-2)=\frac{1}{4}$$

....

$$E(2)-E(1)=\frac{1}{4}$$

والآن قم بإضافة جميع هذه المعادلات، ولاحظ أن العديد من الحدود سيتم اختصارها (تذكر أن $E(1)=0$)، بعد ذلك سنحصل على هذه النتيجة الجميلة:

$$E(n+1)-E(1)=\frac{1}{4}n$$
$$E(n+1)-0=\frac{1}{4}n$$
$$E(n+1)=\frac{1}{4}n$$

والآن يمكننا بسهولة الوصول إلى حل لمسألتنا، حيث أن:

$$E(25)=\frac{1}{4}(24)=6$$

وهذا هو الجواب عن مسألتنا. إذا قمنا برمي 25 قطعة نقد متوازنة وبشكل مستقل كل منها عن الأخرى، فإن العدد المتوقع لأزواج الصور المتتالية (HH) يساوي 6 .

طريقة أخرى للتفكير في هذه النتيجة من ناحية عملية، وهي أنه إذا قمنا برمي قطعة نقد متوازنة 25 مرة، وقمنا بحساب عدد أزواج الصور المتتالية (HH)، ثم قمنا بإعادة التجربة (1,000,000,000) مرة على سبيل المثال، فإننا في المتوسط سنحصل على 6 أزواج من الصور لتجربة رمي 25 قطعة نقد.

المسألة الحادية والعشرون

المجاميع المتساوية

إذا كان لدينا تسع خلايا مرتبة على الشكل 3 × 3 ، ونريد تعبئتها بالأرقام 1- ، 0 ، 1 بشكل عشوائي. أثبت أن من بين المجاميع الثمانية (الصفوف، الأعمدة، الأقطار) هناك على الأقل مجموعين متساويين.

دعنا نرسم شكل توضيحي:

−1	0	1
1	1	−1
−1	0	0

تظهر الصورة أحد الاحتمالات الممكنة لتوزيع الأرقام 1- ، 0 ، 1 على الخلايا. بالطبع هناك العديد من الاحتمالات الأخرى لتوزيع الأرقام. في الواقع فإن هناك سبعة مجاميع محتملة لكل صف أو عمود أو قطر وهي:

$$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$$

على سبيل المثال، في الصورة أعلاه مجموع الأرقام في الصف الأول يساوي

$$(-1)+0+1=0$$

يوجد أيضاً ثلاثة صفوف، وثلاثة أعمدة، وقطرين، وسنطلق عليها للتسهيل اسم "المجاميع المستقيمة".

نريد أن نثبت أنه بغض النظر عن كيفية توزيعنا للأرقام -1 ، 0 ، 1 على الخلايا التسع سيكون هناك على الأقل اثنين من المجاميع المستقيمة المتساوية. طريقة "الهجوم الغاشم" لحل هذه المسألة هو أن نقوم ببساطة بإيجاد جميع التشكيلات الممكنة لتعبئة هذه الخلايا التسع، ثم بعد ذلك نبين أنه لكل تشكيل ممكن يوجد على الأقل اثنين من المجاميع المستقيمة المتساوية. المشكلة في هذا المسار هو أن عدد التشكيلات الممكنة كبير، حيث يوجد لدينا $3^9 = 19683$ من التشكيلات، وهذا عدد كبير جدًّا. يبدو أن هذه الطريقة لن تساعدنا في الحل، لذا دعنا نبحث عن طريقة ذكية أخرى لحل المسألة.

مفتاح حل هذه المسألة والمسائل الأخرى التي تشبهها هي استراتيجية رياضية مهمة تعرف باسم مبدأ برج الحمام (Pigeonhole Principle) ويعرف أيضاً باسم مبدأ صندوق درشليه (Dirichlet Box Principle) . إن هذا المبدأ بسيط وخادع في الوقت نفسه، وفي أبسط صوره ينص هذا المبدأ على أنه عند قيامك بوضع ثلاث حمامات في برجين للحمام، فإن أحد الأبراج سيحتوي على حمامتين على الأقل.

دعنا نعمم مبدأ برج الحمام بحيث نستطيع استخدامه في حل العديد من المسائل الرياضية الصعبة.

نظرية 21 . 1 (مبدأ برج الحمام). إذا وضعنا $(nk+1)$ من الحمام في (n) من الأبراج، فإن أحد الأبراج على الأقل سيحتوي على $(k+1)$ حمامة على الأقل.

من السهل إثبات هذه النظرية إذا استخدمنا طريقة البرهان بالتناقض. افرض أن النظرية خاطئة، وبالتالي إذا قمنا بوضع $(nk+1)$ من الحمام في (n) من الأبراج، فإنه لا يوجد أي برج سيحتوي على $(k+1)$ أو أكثر من الحمام. وهذا يعني أن كل برج من الأبراج التي عددها (n) سوف يحوي على الأكثر على (k) حمامة. ومن ثَم فإن العدد الكلي للحمام سوف يكون على الأكثر (nk) ، وهذا تناقض لأن العدد الكلي للحمام يساوي $(nk+1)$.

دعنا نستخدم مبدأ برج الحمام لحل مسألتنا. الصعوبة المتوقع أن نقابلها عند تطبيق هذا المبدأ هي تحديد أي الأشياء يمثل "الحمام" وأيها يمثل "الأبراج". لكن من الواضح أن "الحمام" والأبراج" هي مجرد استعارات مجازية لأي نوع من المفردات أو البنى الرياضية.

حسناً، ما هي البنى الرياضية الملائمة لمسألتنا؟ كما ناقشنا سابقة لدينا (7) مجاميع عددية محتملة: $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$، ولدينا أيضاً (8) مجاميع مستقيمة (3 صفوف، 3 أعمدة، قطرين). بما أن كل مجموع من المجاميع المستقيمة الثمانية سيكون مساوياً لأحد المجاميع العددية السبعة، دعنا نستخدم الترميز التالي:

الحمام ≡ المجاميع المستقيمة الثمانية (صفوف، أعمدة، أقطار)

الأبراج ≡ المجاميع العددية السبعة $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

إذاً، وبالنسبة لمسألتنا لدينا (8) حمامات، نريد أن نضعها في (7) أبراج. بالاعتماد على النظرية 1.21 فهذا يعني أن $nk+1=8$ ، $n=7$ ، وبالتالي فإن $k=1$. النظرية 1.21 تخبرنا أن أحد الأبراج على الأقل يحتوي على الأقل على $(k+1=2)$ حمامة. أي أن أحد المجاميع العددية على الأقل $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ سيوجد على الأقل في اثنين من المجاميع المستقيمة (صفوف، أعمدة، أقطار). إذا وباستخدام مبدأ برج الحمام، قمنا بإثبات أن من بين المجاميع الثمانية المحتملة للصفوف، والأعمدة، والأقطار، يوجد على الأقل مجموعين متساويين. وهذا صحيح بغض النظر عن كيفية توزيع الأرقام 1- ، 0 ، 1 على الخلايا.

عندما تطلب منك المسألة أن تثبت أن بعض الأعداد على الأقل توجد في شيء ما، وذلك في بعض الأنواع من التشكيلات الرياضية المتقطعة، يجب أن يكون هذا بمثابة "الراية الحمراء" التي تشير لك بأن عليك استخدام مبدأ برج الحمام، لذا لا تنسى النظرية 1.21.

المسألة الثانية والعشرون

قابلية القسمة على 5

أثبت أن العدد:

$$N = 1 + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99}$$

يقبل القسمة على 5 .

يقبل العدد القسمة على 5 إذا كانت منزلته الأخيرة 0 أو 5 . إذاً إحدى الطرق لحل هذه المسألة هي حساب العدد N ومن ثم النظر إلى منزلته الأخيرة، هذه الطريقة ستعمل نظريًّا لكنها غير عملية، لأننا نحتاج أن نحسب عدد يصل إلى القوة التاسعة والتسعين، وهذا عدد كبير سيتكون من سبعين منزلة تقريبًا. لذلك نحتاج إلى طريقة أفضل لحل هذه المسألة.

بالاعتماد على مبدأ التماثل (Symmetry) والذي يعتبر شيئاً جيداً في الرياضيات، دعنا نكتب الرقم 1 على الشكل 1^{99} ، عندئذ سيصبح كل حد من حدود N مرفوعاً للأس (للقوة) 99 :

$$N = 1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99}$$

من الجيد دائماً في حل المسألة الرياضية أن نحاول تمثيل الأشياء باستخدام أكبر قدر ممكن من التماثل.

الآن الأس 99 يعتبر كبيراً جدًّا، ومن ثَم من غير المرجح أن يساعدنا في استقصاء الحل. لذا دعنا نعمم العدد N كدالة بدلالة عدد صحيح موجب m نستطيع التعبير عن ذلك كما يلي:

$$N(m) = 1^m + 2^m + 3^m + 4^m + 5^m$$

أحد الأسرار الصغيرة لحل المسائل الرياضية هو أنه عادةً ما يكون من الأفضل أن نأخذ بعين الاعتبار مسألة أكثر شمولية من المسألة التي نحاول حلها، هنا عممنا المسألة من خلال الأخذ بعين الاعتبار الدالة $N(m)$ ، والآن يمكننا النظر إلى الحالات الصغيرة والحالات الخاصة لنرى إمكانية وجود أنماط يمكن لنا استغلالها.

أولاً، دعنا نأخذ الحالة عندما $m = 1$:

$$N(1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

والآن يمكننا أن نرى بوضوح أن $N(1)$ تقبل القسمة على 5؛ حيث أنه بعد إعادة ترتيب حدود $N(1)$ يمكن كتابتها على الشكل:

$$N(1) = (1 + 4) + (2 + 3) + 5$$

والذي يظهر لنا بوضوح أن $N(1)$ تقبل القسمة على 5 لأن كلا من $1+4$ ، $2+3$ ، 5 يقبل القسمة على 5 . إعادة الترتيب السابقة تقترح لنا فكرة جريئة. إذا كتبنا $N(m)$ على الشكل:

$$N(m) = (1^m + 4^m) + (2^m + 3^m) + (5^m)$$

عندها من الممكن أن $1+4$ تقسم $(1^m + 4^m)$ ، $2+3$ تقسم $(2^m + 3^m)$ ، وبالطبع فإن 5 تقسم 5^m . هذا تفكير جيد، وربما يساعدنا على حل المسألة. وبشكل أكثر عمومية، هل من الصحيح أن $a+b$ تقسم $a^m + b^m$ عندما تكون a ، b ، m أعداداً صحيحةً موجبةً؟ دعنا نتفحص هذه الفكرة ونرى إذا ما كانت صحيحه أم لا .

مرة أخرى دعنا ننظر إلى الحالات الصغيرة والحالات الخاصة:

هل $2+3$ تقسم $2^1 + 3^1$؟ الجواب: نعم.

هل $2+3$ تقسم $2^2 + 3^2$؟ الجواب: لا.

هل $2+3$ تقسم $2^3 + 3^3$؟ الجواب: نعم.

تستطيع الاستمرار في هذا الاستقصاء، وسوف تكتشف أن $2+3$ تقسم $2^m + 3^m$ عندما تكون m عدد فردي. هذه الملاحظة تعطينا التخمين التالي:

تخمين: لتكن a ، b ، m أعداداً صحيحة موجبة. إذا كانت m عدداً فرديًا، فإن $a+b$ تقسم a^m+b^m.

الآن التحدي الذي يواجهنا هو إثبات صحة هذا التخمين. في الحقيقة فإنه يوجد العديد من الطرق للقيام بذلك، فعلى سبيل المثال يمكننا الاستعانة بصديقنا القديم: الاستقراء الرياضي، كما يمكننا البحث عن نظرية موجودة قد تستطيع مساعدتنا، مثلاً يمكننا استخدام نظرية مفيدة تسمى نظرية العوامل (Factor Theorem):

نظرية: 1.22 (نظرية العوامل).

إذا كانت k صفرا لكثيرة الحدود $f(x)$ ، فإن $x-k$ هو أحد عوامل $f(x)$

لاستخدام هذه النظرية دعنا نفرض أن:

$$f(x) = a^n + x^n$$

لاحظ أن $f(x)$ كثيرة حدود. وبالتالي فإن نظرية العوامل تخبرنا أنه إذا كانت $-a$ صفراً للدالة $f(x)$، وهذا يعني أن $f(-a)=0$ ، فإن $x-(-a)=x+a$ هو أحد عوامل $f(x)$. لاحظ أن $f(-a)=a^n+(-a)^n$. وإذا كانت n عدداً فرديًا، فإن

$$f(-a) = a^n + (-a)^n = a^n - a^n = 0$$

وهذا يعني أن $x+a$ تقسم x^n+a^n . الآن ومن خلال أخذ $x=b$ ، فإننا سنحصل مباشرةً على النتيجة التي نحتاجها لحل مسألتنا وهي: إذا كانت n عدداً فرديًا فإن $a+b$ يقسم (أو أحد عوامل) a^n+b^n.

ماذا يحصل لو كانت n عدداً زوجيًا؟ إذا كانت n عدداً زوجيًا، فإن $a+b$ تقسم a^n+b^n في بعض الأحيان فمثلا عندما $a=b=2$ ، $n=2$ فإن $2+2$ بالتأكيد تقسم 2^2+2^2.

في مسألتنا:

$$N(99) = 1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99}$$
$$= \left(1^{99} + 4^{99}\right) + \left(2^{99} + 3^{99}\right) + \left(5^{99}\right)$$

وبما أن 99 عدداً فرديًا فإن:

$1 + 4$ تقسم $(1^{99} + 4^{99})$

$2 + 3$ تقسم $(2^{99} + 3^{99})$

وهذا يعني أن 5 تقسم كلاً من: $(1^{99} + 4^{99})$ ، $(2^{99} + 3^{99})$ ، (5^{99}). وبالتالي فإن 5 تقسم العدد N ، وهذا يحل مسألتنا الأصلية.

المسألة الثالثة والعشرون

معادلة ديوفنتية

حل المعادلة:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{3}{m\cdot n}=\frac{1}{4}$$

بالنسبة للأعداد الصحيحة الموجبة m ، n .

المعادلة التي نبحث عن حلها في مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة تسمى معادلة ديوفنتية (Diophantine Equation) . وبشكل عام فإنه من الصعب جدًّا حل هذا النوع من المعادلات. دعنا نبدأ من خلال الفرض:

$$f(m,n)=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{3}{m\cdot n}$$

مسألتنا الآن هي إيجاد عددين صحيحين موجبين m ، و n (إن وجد) بحيث $f(m,n)=\frac{1}{4}$.

الشيء الأول الذي يجب علينا ملاحظته هو أن $f(m,n)$ دالة متماثلة، وبمعنى آخر:

$$f(m,n)=f(n,m)$$

لذلك إذا كان (m,n) حلاً للمعادلة، فإن (n,m) هو أيضًا حلٌّ لها.

دعنا نبدأ من خلال النظر إلى أحد الحالات الخاصة:

إذا كانت $m=n$ فإن المعادلة $f(m,n)=\frac{1}{4}$ ستصبح:

$$\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}=\frac{1}{4}$$

وبعد القليل من العمليات الجبرية سنحصل على المعادلة:

$$n^2 - 8n - 12 = 0$$

ويمكننا إيجاد n من خلال استخدام الصيغة التربيعية:

نظرية 1.23 الصيغة التربيعية.

إذا كانت a ، b ، c أعداداً حقيقية بحيث $a \neq 0$ فإن جذور المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هي:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

والآن باستخدام الصيغة التربيعية لحل المعادلة $n^2 - 8n - 12 = 0$ نجد أنه إذا كانت $m = n$ ، فإن:

$$n = 4 \pm 2\sqrt{7}$$

وعلى الرغم من أن هذا حلٌّ للمعادلة $n^2 - 8n - 12 = 0$ ، لكننا لا نستطيع الأخذ به لأن $4 + 2\sqrt{7}$ ، $4 - 2\sqrt{7}$ ليست أعداداً صحيحة موجبة كما هو مطلوب. تذكر أننا نبحث عن عددين صحيحين موجبين m ، n بحيث $f(m,n) = \frac{1}{4}$. إذاً يمكننا أن نستنتج أن m ، n لا يمكن أن يكونا متساويين، لذلك يبقى أمامنا خياران: إما أن $m > n$ أو $m < n$ (هذا إن وجد حل). ليست جميع المعادلات الديوفنتية لها حل في مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة، وعندما نحاول أن نحل معادلة ديوفنتية تبرز العديد من الأسئلة: هل يوجد حل؟ وإذا وجد حل هل هو وحيد؟ وإذا كانت هناك حلول فكيف نجدها؟

ماذا يمكننا أيضًا أن نكتشف عند النظر للمعادلة $f(m,n) = \frac{1}{4}$. لا تتخوف من القيام ببعض المشاهدات البسيطة، فأحياناً تكون هذه المشاهدات البسيطة هي المفتاح لحل المسألة. عندما ننظر إلى المعادلة:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{3}{m \cdot n} = \frac{1}{4}$$

فإن الشيء الذي قد لا يكون واضحاً بشكل كبير هو أن m ، n يجب أن يكون كلٌّ منهما أكبر من 4 ، لماذا؟ إذا كان m أو n أقل أو يساوي 4 فإن الطرف الأيسر للمعادلة :

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{3}{m\cdot n}=\frac{1}{4}$$

سوف يكون أكبر من $\frac{1}{4}$ ، في حين أن الطرف الأيمن هو $\frac{1}{4}$ وهذا يؤدي إلى تناقض. لذا يجب أن يكون $m>4$ و $n>4$.

بما أن $m>4$ و $n>4$ ، فمن الممكن إضافة مجاهيل صحيحه موجبة مثل a ، و b للعدد 4 لنحصل على m و n . وبمعنى آخر يوجد عددان صحيحان موجبان a ، b بحيث $m=a+4$ ، $n=b+4$. الأعداد الصحيحة والموجبة a ، b يسميان متغيرات راكدة (Slack Variables) . وهذه أداة أخرى يمكن لك أن تضيفها إلى حقيبتك الخاصة بحل المسائل الرياضية. حيث أنه لتحويل متباينة مثل $m>4$ إلى معادلة، يمكننا أن نضيف متغيراً راكداً مثل a لنحصل على المعادلة: $m=a+4$.

والآن وبما أن $m=a+4$ ، $n=b+4$ فإن المعادلة $f(m,n)=\frac{1}{4}$ تصبح على الشكل:

$$\frac{1}{(a+4)}+\frac{1}{(b+4)}+\frac{3}{(a+4)(b+4)}=\frac{1}{4}$$

إذا قمنا بضرب طرفي المعادلة بـ $4(a+4)(b+4)$ وبسطنا، فإننا سنحصل على النتيجة المذهلة التالية:

$$ab=28$$

إذا استطعنا أن نحل المعادلة: $ab=28$ بالنسبة إلى الأعداد الصحيحة الموجبة a ، b، عندئذ يمكننا بسهولة إيجاد m ، n وذلك لأن $m=a+4$ ، $n=b+4$.

العدد 28 يمكن كتابته كحاصل ضرب عددين صحيحين موجبين بعدة طرق وهي:

$$1\times28,\ \ 28\times1,\ \ 2\times14,\ \ 14\times2,\ \ 4\times7,\ \ 7\times4$$

وهذا يعطينا ستة حلول (a,b) وهي:

$$(1,28),\ \ (28,1),\ \ (2,14),\ \ (14,2),\ \ (4,7),\ \ (7,4)$$

لكن، وبما أن $m = a + 4$ ، $n = b + 4$ فإننا سنحصل على ستة حلول لمعادلتنا الأصلية $f(m,n) = \frac{1}{4}$. وتلك الحلول هي:

$$(m,n):\ (5,32),\ (32,5),\ (6,18),\ (18,6),\ (8,11),\ (11,8)$$

يمكننا أن نتأكد أن هذه الحلول تحقق المعادلة $f(m,n) = \frac{1}{4}$ ، على سبيل المثال لنأخذ الزوج المرتب $(m,n) = (5,32)$:

$$\begin{aligned} f(5,32) &= \frac{1}{5} + \frac{1}{32} + \frac{3}{(5)\cdot(32)} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{32} + \frac{3}{160} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

المسألة الرابعة والعشرون

معادلة دالية

جد الدالة $f(x)$ التي تحقق المعادلة:

$$xf(x)+2xf(-x)=-1$$

يسمى هذا النوع من المعادلات بالمعادلات الدالية (Functional Equations)، حيث المعطى هو معادلة تحتوي مجهولاً معيناً هو $f(x)$، والمطلوب هو إيجاد الدالة $f(x)$ التي تحقق المعادلة. بالتأكيد سنفرض أن الدالة $f(x)$ موجودة، ومن المحتمل وجود أكثر من دالة $f(x)$ تحقق المعادلة المعطاة.

غالباً ما نجد صعوبة في حل المعادلات الدالية، وعلى الرغم من إجراء العديد من الأبحاث في هذا المجال، إلا أنه لا يوجد نظرية موحدة لحل هذا النوع من المعادلات لغاية الآن، ولسوء الحظ لا يوجد هناك طريقة عالمية معروفة لحل المعادلات الدالية. إلا في حالات قليلة عندما تكون المعادلة الدالية تحتوي صيغة خاصة ومدروسة جيداً. لذلك فإن طريقة حلنا لهذه المعادلات سوف تعتمد على مجموعة من الخدع الخاصة (Ad Hoc)والتخمينات المحظوظة. بعض الطرق المستخدمة لحل المعادلات الدالية تشمل التعويض(Substitution)، والحذف(Elimination)، والمعاملات غير المعينة (Undetermined Coefficients)، والارتداد أو الإنعكاس(Recursion). ومن الممكن أيضا حل بعض المعادلات الدالية من خلال النظر إلى بعض القيم الخاصة.

وفيما يلي بعض الاستراتيجيات المستخدمة في حل المعادلات الدالية:

١- أنظر إلى بعض القيم الخاصة مثل: $f(0)$، $f(1)$، $f(-1)$.

٢- خذ بعين الاعتبار $f(x+k)$، و $f(kx)$ لثابت معين k.

٣- استبدل x بـ $-x$ وانظر ماذا يحدث.

٤- استبدل x بدالة معطاة بدلالة x مثل $\frac{1}{x}$.

٥- أنظر فيما إذا كانت $f(x)$ دالة ضربية (Multiplicative)، وهذا يعني أنها تحقق الخاصية التالية: إذا كان m ، n عددان صحيحان وموجبان وأوليان بالنسبة لبعضهما البعض (Coprime) فإن:

$$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$$

هذه القائمة من الطرق والأساليب ليست شاملة بأي حال من الأحوال، ولكنها فقط تعطينا أفكاراً عن كيفية استكشاف معادلة دالية معطاة. إذا كنا محظوظين فإن التحويلات الخاصة سوف تختصر المعادلة الدالية إلى نظام من المعادلات الجبرية الخطية، وفي هذه الحالة يمكننا استخدام الأساليب الجبرية المعيارية لإيجاد $f(x)$.

كالعادة دعنا في البداية ننظر إلى بعض الحالات الخاصة: إذا كانت $x = 1$ نحصل على:

$$f(1) + 2f(-1) = -1$$

حسنا، أنا لست متأكداً ماذا يخبرنا هذا، لذا دعنا نجرب حالة خاصة أخرى. عندما $x = 0$ نحصل على:

$$0 \cdot f(0) + 0 \cdot f(-0) = -1$$

أو ببساطة: $0 = -1$ ، وهذا بالطبع مستحيل، لكنه في الحقيقة يخبرنا بشيء مفيد وهو أن x لا يمكن أن تساوي صفراً (لأن هذا يؤدي إلى تناقض). وبما أن $x \neq 0$ فإنه من المحتمل أن $f(x)$ يحتوي على حالة "القسمة على صفر"، بمعنى آخر فإن $f(x)$ قد يحتوي على x في مقامه كأن نقول أن $f(x) = \frac{ax+b}{x}$ أو ما يشابه ذلك، وذلك لأن القسمة على صفر كمية غير معرَّفة، وهذا يوضح لماذا x لا يمكن أن تساوي صفر.

ماذا يمكننا أن نفعل غير ذلك؟ دعنا نجرب استبدال x بـ $-x$ ونرى ماذا سيحدث. إذا استبدلنا x بـ $-x$ فإن المعادلة:

$$xf(x) + 2xf(-x) = -1$$

تصبح:

$$-xf(-x) - 2xf(x) = -1$$

قد يبدو ذلك مربكاً، لكننا في الواقع نحرز بعض التقدم، أصبح لدينا الآن معادلتان بمجهولين. المجهولان هما $f(x)$ و $f(-x)$. وسيصبح هذا واضحا إذا استبدلنا $f(x)$ بـ u واستبدلنا $f(-x)$ بـ v حيث سنحصل على نظام المعادلات الخطية التالي:

$$\begin{cases} xu + 2xv = -1 \\ -2xu - xv = -1 \end{cases}$$

باستخدام المصفوفات يمكننا إعادة كتابة النظام على الشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} x & 2x \\ -2x & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

عند هذه النقطة يمكننا القول إن المسألة قد حُلت بشكل أساسي، حيث أن كل ما نحتاجه هو إيجاد u ، v بحيث $u = f(x)$ ، $v = f(-x)$. هناك العديد من الطرق للقيام بذلك، تستطيع أن تجد u بدلالة v من المعادلة الأولى، ثم تعويض ذلك في المعادلة الثانية، ثم نحل بالنسبة إلى v .

طريقة أخرى يمكن أن نستخدمها وهي إيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} x & 2x \\ -2x & -x \end{bmatrix}$ الذي هو:

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{3x} & \frac{-2}{3x} \\ \frac{2}{3x} & \frac{1}{3x} \end{bmatrix}$$

ومن ثم ضرب المعادلة السابقة بالمعكوس الضربي لنحصل على:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3x & -2/3x \\ 2/3x & 1/3x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/x \\ -1/x \end{bmatrix}$$

وهذا فقط جبر خطي أساسي، الجزء الصعب كان تحويل المعادلة الدالية إلى نظام من معادلات خطية، وقد فعلنا ذلك بتحويل محظوظ باستبدال: x بـ $-x$. من الواضح الآن أن $u = f(x) = \frac{1}{x}$ هو الحل لمسألتنا. نستطيع أيضاً أن نرى لماذا x لا يمكن أن تكون صفراً، وذلك لأن القسمة على صفر كمية غير معرَّفة.

المسألة الخامسة والعشرون

معادلة أسية

جد حل المعادلة:

$$|x-3|^{\left(\frac{x^2-8x+15}{x-2}\right)}=1$$

أحياناً تكون المسألة أسهل مما تبدو. هنا أخذنا $|x-3|$ للقوة $\left(\frac{x^2-8x+15}{x-2}\right)$، تبدو هذه المسألة بأنها صعبة، لذا دعنا الرجوع للأساسيات.

عوضاً عن الأخذ بالصيغة المعقدة للمسألة، لنأخذ المسألة الأبسط $a^b=1$ حيث a ، b عددان حقيقيان. كيف يمكن لــ a^b أن تساوي 1 . دعنا نجري بعض المحاولات. لاحظ أولاً أن 0^0 كمية غير معرَّفة. وبالتالي لا يمكن أن تكون $a=b=0$. لاحظ أيضًا أنه إذا كانت $a^b=1$ ، فإن $a=1$ أو $b=0$ ، حيث أن أي عدد غير صفري مرفوع للقوة صفر يساوي 1، فمثلا $3^0=1$.

بما أن $a=1$ أو $b=0$ دعنا نبدأ من خلال الفرض:

$$a=|x-3|=1$$

وهذا يعني أن $x-3=1$ أو $x-3=-1$. وهذا يؤدي إلى أن $x=4$ أو $x=2$. الآن علينا التفكير قليلاً بهذه القيم المحتملة لـ x . لسوء الحظ علينا أن نتجاهل $x=2$ لأنه لو عوضنا $x=2$ في المعادلة الأصلية سنجد أن $(x^2-8x+15)/(x-2)$ ستؤدي إلى القسمة على صفر، وكما نعرف فإن القسمة على صفر غير معرَّفة رياضيًا. إذاً $x=4$ هو أحد الحلول. ونستطيع ببساطة التأكد من ذلك من خلال تعويض $x=4$ في المعادلة الأصلية حيث سنحصل على:

$$(4-3)^{\frac{16-32+15}{4-2}} = 1^{-\frac{1}{2}} = 1$$

الآن دعنا نأخذ إمكانية أن $b = 0$، وهذا يعطينا:

$$b = \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 2} = 0$$

وهذا يعني أن $x^2 - 8x + 15 = 0$، وبتحليل كثيرة الحدود هذه نحصل على $(x-3)(x-5) = 0$، وهذه المعادلة لها جذران هما: $x = 3$، $x = 5$، وكلاهما مرشح لأن يكون حلًّا للمعادلة الأصلية، ولكن علينا التأكد من ذلك. إذا عوضنا $x = 3$ في المعادلة:

$$|x-3|^{\left(\frac{x^2-8x+15}{x-2}\right)} = 1$$

سنحصل على 0^0، وهي التي تُعدّ كمية غير معرَّفة، ومن ثَم فإن $x = 3$ ليست حلاً صحيحاً للمعادلة. ولكن عندما نعوض $x = 5$ سنلاحظ أنها حلٌّ صحيح لأن:

$$|5-3|^{\frac{25-40+15}{5-2}} = 2^0 = 1$$

وهذا يعني أن حلول المعادلة:

$$|x-3|^{\frac{x^2-8x+15}{x-2}} = 1$$

هي: $x = 4$ ، $x = 5$.

المسألة السادسة والعشرون

القيمة المطلقة

لتكن x ، y ، z أعداداً حقيقية تحقق نظام المعادلات غير الخطية (System of Nonlinear Equations) التالي:

$$\begin{aligned} x^2 + 6y &= -14 \\ y^2 + 12z &= -63 \\ z^2 - 4x &= 28 \end{aligned}$$

جد قيمة: $|x + y + z|$.

نريد أن نجد القيمة المطلقة (Absolute Value) للمقدار $x + y + z$. يمكننا أن نحاول حل كل واحدة من هذه المعادلات بالنسبة إلى x ، y ، z ، ولكن سنبقى بحاجة لمعرفة x^2 ، y^2 ، z^2 ، وبالتالي فإن هذا الطريق لن يقدم لنا المساعدة المطلوبة.

دعنا ننظر إلى تعريف دالة القيمة المطلقة. أحد التعاريف ينص على أن:

$$|x| = \begin{cases} x & if \quad x \geq 0 \\ -x & if \quad x < 0 \end{cases}$$

ويوجد تعريف آخر مكافئ للتعريف السابق ينص على أن: $|x| = \sqrt{x^2}$. دعنا نرى ماذا يحدث لو استخدمنا التعريف الأخير. سوف نحصل على أن:

$$|x + y + z| = \sqrt{(x + y + z)^2}$$

لكن:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$$

وهذه الصيغة الأخيرة تحتوي على: x^2 ، y^2 ، z^2 تماماً كما هو الوضع في مسألتنا. والآن إذا جمعنا المعادلات الثلاث في المسألة فإننا نحصل على:

$$x^2+y^2+z^2+6y+12z-4x=-49$$

إنها عادةٌ جيدةٌ أن نقوم دائماً بتجميع الحدود المتشابهة، وبالقيام بذلك سنحصل على:

$$(x^2-4x)+(y^2+6y)+(z^2+12z)=-49$$

الآن ما الذي يمكننا عمله؟ أحد الأفكار التي قد تتبادر إلى أذهاننا هي أن نقوم بتحليل كثيرات الحدود هذه، لكن كيف؟ لو كان لدينا x^2-4x+4 بدلا من x^2-4x لاستطعنا تحليلها كالآتي:

$$x^2-4x+4=(x-2)^2$$

حسناً، من أجل القيام بذلك، دعنا نضيف ونطرح العدد 4 من x^2-4x، وبشكل مشابه نستطيع أن نضيف ونطرح أعداداً معينة من (y^2+6y) و (z^2+12z) لنحصل على مربعات كاملة:

$$(x^2-4x+4)-4+(y^2+6y+9)-9+(z^2+12z+36)-36=-49$$

بإعادة ترتيب هذه المعادلة نحصل على:

$$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)+(z^2+12z+36)=0$$

الآن نستطيع تحليل كثيرات الحدود لنحصل على:

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z+6)^2=0$$

ما زلنا لا نعرف قيم x,y,z ، وقد يبدو أننا وقعنا في الوحل. ولكن تذكر أن المربع لا يمكن أن يكون سالباً، أي أن

$$(z+6)^2\ge 0 \text{ ، } (y+3)^2\ge 0 \text{ ، } (x-2)^2\ge 0$$

والطريقة الوحيدة لجعل مجموع هذه المربعات الثلاثة يساوي صفراً هو أن يكون كل منها صفر. وهذا يعني:

$$(z+6)^2 = 0 \text{ ، } (y+3)^2 = 0 \text{ ، } (x-2)^2 = 0$$

الآن أصبح الحل بديهيًّا، يجب أن تكون:

$$z = -6 \text{ ، } y = -3 \text{ ، } x = 2$$

وأخيراً نلاحظ أن:

$$|x+y+z| = |2-3-6| = |-7| = 7$$

وهذا هو الحل النهائي للمسألة.

المسألة السابعة والعشرون

إيجاد الأسس

حل المعادلة:

$$9^x - 3^{x+1} - 4 = 0$$

حيث x عدداً حقيقيًا.

عندما تواجهنا معادلة تحتوي على متغيرات في الأسس، فإننا عادةً ما نلجأ لاستخدام اللوغاريتمات. على سبيل المثال إذا كانت $y = 9^x$ ، فإن:

$$\log y = \log(9^x) = x \log 9$$

وعند حل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير x نحصل على:

$$x = \frac{\log y}{\log 9}$$

لاحظ أن أساس اللوغاريتم ليس له أي أهمية هنا، حيث أننا سنحصل على نفس الجواب مهما كان أساس اللوغاريتم. المشكلة في هذه المسألة هي أننا لا نستطيع أخذ اللوغاريتم لطرفي المعادلة بشكل مباشر؛ فالجملة

$$\log(9^x - 3^{x+1} - 4) = \log(0)$$

ليس لها معنى، لأن لوغاريتم الصفر غير معرَّف. كما أنه لا يمكننا توزيع اللوغاريتم على الحدود $9^x - 3^{x+1} - 4$ لأن اللوغاريتم غير توزيعي على عملية الجمع، وبمعنى آخر فإن:

$$\log\left(9^x - 3^{x+1} - 4\right) \neq \log\left(9^x\right) - \log\left(3^{x+1}\right) - \log\left(4\right)$$

إذاً، كيف يمكن لنا أن نحرز تقدماً في حل هذه المسألة؟

لاحظ في البداية أن المسألة المعطاة تحتوي على الرقمين 3، 9 ، ولاحظ أيضًا أن $3^2 = 9$. وعادةً لا يتم اختيار الأرقام الموجودة في المسائل الرياضية بشكل عشوائي؛ بل يتم اختيارها بشكل دقيق بحيث ترتبط مع بعضها بطريقةٍ ما تمكننا من التقدم نحو حل المسألة. إذا تمكنت من اكتشاف كيف ترتبط الأعداد في المسألة مع بعضها، فإن هذا قد يساعدك على حل المسألة، لا تخف أبدًا من أخذ الملاحظات البسيطة والواضحة بعين الاعتبار.

في مسألتنا، وبما أن $3^2 = 9$ ، يمكننا إعادة كتابة المعادلة الأصلية على الشكل:

$$3^{2x} - 3^{x+1} - 4 = 0$$

أو على الشكل:

$$\left(3^x\right)^2 - 3\left(3^x\right) - 4 = 0$$

والآن سنستخدم التعويض من خلال تقديم متغير جديد u ، ولنفرض أن $u = 3^x$ ، ومن ثَم فإن المعادلة الأصلية يمكن إعادة كتابتها بدلالة المتغير الجديد u على الشكل:

$$u^2 - 3u - 4 = 0$$

وهذه كثيرة حدود يمكن تحليلها على الشكل:

$$u^2 - 3u - 4 = \left(u+1\right)\left(u-4\right) = 0$$

أي أن $u+1=0$ ، أو $u-4=0$. وهذا يعني أن $u=-1$ ، أو $u=4$.

تذكر أننا عرَّفنا $u = 3^x$ ، وبما أن $u=-1$ ، أو $u=4$ ، فهذا يعطينا معادلتين:

$$4 = 3^x \quad ، \quad -1 = 3^x$$

والآن يمكننا أخذ اللوغاريتم لإيجاد قيمة x :

$$(i) \quad \log_3\left(-1\right) = \log_3\left(3^x\right) = x$$

$$(ii) \quad \log_3(4) = \log_3(3^x) = x$$

بما أن $\log_3(-1)$ عدد تخيلي (غير حقيقي)، فإن الحل الوحيد لمسألتنا هو:

$$x = \log_3(4) \approx 1.26186$$

يمكنك أن تستخدم الآلة الحاسبة لتبين أن

$$9^{1.26186} - 3^{2.26186} - 4 = 0.000010829$$

ولكن الحل الدقيق هو:

$$\log_3 4 = \ln 4/\ln 3$$

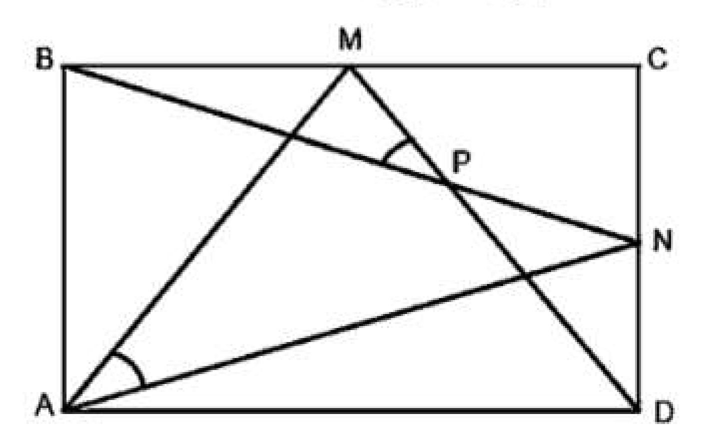
لقد استخدمنا لوغاريتم للأساس 3 ، لأن $\log_3 3 = 1$ ، ولكن في الحقيقية يمكنك استخدام لوغاريتم لأي أساس تريده وستسير الأمور في الاتجاه الصحيح؛ وذلك لأن أحد قواعد اللوغاريتمات ينص على ما يلي:

$$\log_3 a = \frac{\log_b a}{\log_b 3} \text{ ، لأي أساس } b > 1$$

المسألة الثامنة والعشرون

الزوايا المتطابقة

في المستطيل $ABCD$ الموضح في الشكل أدناه، النقاط M ، N هي نقاط المنتصف للأضلاع BC ، CD على التوالي. النقطة P هي نقطة تقاطع القطعتين المستقيمين: BN ، DM. أثبت أن الزاويتان MAN ، BPM متطابقتين (متساويتين).

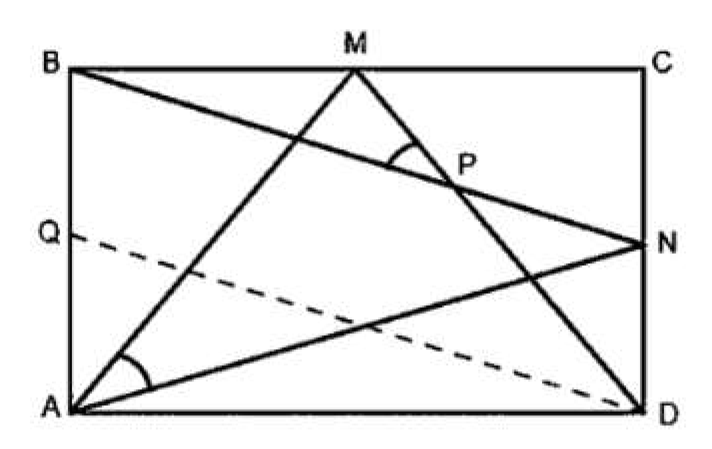


المسائل الهندسية عادةً ما تكون ممتعة ومثيرة للتحدي، وقد يكون من الصعب حلها. طريقة الهجوم الغاشم لحل مسألة هندسية هي البدء بوضع علامات لكل ضلع ولكل زاوية تعرفها، وبعد ذلك تبدأ بحساب كل شيء لا تعرفه. باستخدام نظرية فيثاغورث، وقانون الجيوب، أو قانون جيوب التمام (أنظر إلى الملحق B)، وبعد إجراء جميع الحسابات الممكنة نأمل عند نقطة معينة إن الكمية التي تبحث عنها ستظهر. تسمى هذه التقنية المملة والطويلة أحيانًا مطاردة الزاوية (Angle Chasing).

إذا كان هناك سرٌّ ما لحل المسائل الهندسية، فهو الأسلوب الذي يقوم على إضافة الإنشاء المساعد (An Auxiliary Construction) الصحيح للرسم الهندسي. هذا الإنشاء المساعد قد يكون نقطة إضافية، أو قطعة مستقيمة، أو مستقيم، أو شعاع، أو دائرة، تضيفها إلى الرسم المعطى لتساعدك على كشف الجوانب المخفية الضرورية لحل المسألة.

في هذه المسألة سنضيف القطعة المستقيمة QD إلى الرسم، وهي ظاهرة في الرسم على شكل خط متقطع (Dotted Line). تم إنشاء القطعة المستقيمة QD بحيث تكون موازية للقطعة المستقيمة BN، وبالتالي فإن QD يوازي BN. والآن، لاحظ أن MD هو خط مستعرض (Transversal) يقطع الخطين المتوازيين BN، QD، وبالتالي فإن الزوايا المتناظرة (Corresponding) متطابقة، أي أن قياس الزاوية BPM يساوي قياس الزاوية QDM. ومن خلال استخدام التماثل (Symmetry) لاحظ أن الزاوية MAN تطابق الزاوية QDM، والتي بدورها تطابق الزاوية BPM. ومن ثَم فإن الزاوية MAN تطابق الزاوية BPD. ويمكننا التعبير عن ذلك بالرموز على الشكل:

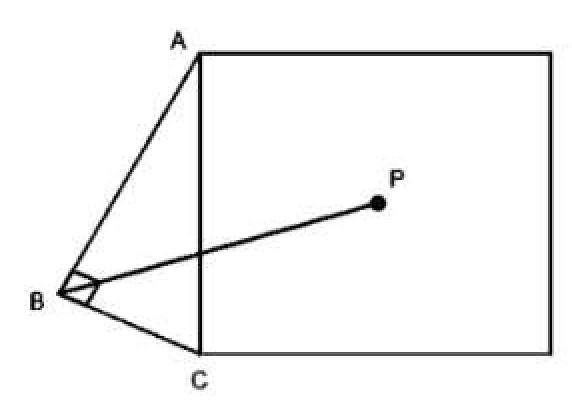
$$\angle MAN \cong \angle BPM$$



المسألة التاسعة والعشرون

تنصيف الزاوية

النقطة P هي مركز المربع المنشأ على الوتر AC في المثلث القائم الزاوية ABC . أثبت أن القطعة المستقيمة BP تنصف (Bisects) الزاوية ABC .

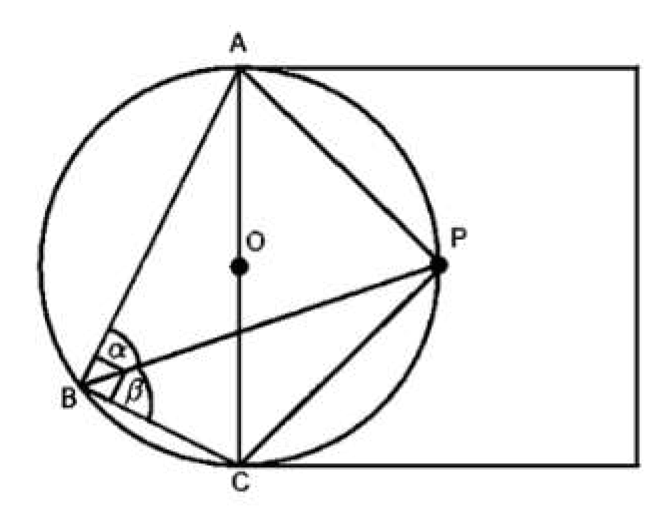


معظم المسائل الهندسية يتم كتابتها بعناية بحيث تكون بعض المعلومات المهمة مخفية عن الأنظار ويصعب الوصول إليها. لحل المسائل من هذا النوع يجب عليك أن تجد هذه المعلومات المخفية من خلال القيام ببعض الإنشاءات المساعدة (الإضافية). إحدى الطرق الجيدة للقيام بذلك تكمن في محاولة الحصول على تماثلٍ ما عندما تقوم بإنشاء معين. كنت أتمنى لو كانت هناك طريقة معينة للقيام بذلك، ولكن في الحقيقية فإن الأمر يحتاج إلى الكثير من الممارسة لمعرفة الإنشاء المناسب الذي عليك أن تقوم به. الحركة العبقرية التي يمكننا القيام بها في هذه المسألة هي إنشاء دائرة حول مركز (منتصف) القطعة المستقيمة AC .

وربما تتذكر من معرفتك المسبقة بالهندسة أن الزاوية المحيطية المرسومة في نصف الدائرة تكون قائمة. ويمكننا أن ننشأ نصف دائرة حول المنصف، مركزها النقطة O التي تقع على القطعة المستقيمة

AC، ستحتوى نصف الدائرة هذه على النقاط A، B، C. ومن المعروف أيضاً أنه لأي مربع إذا قمنا بتوصيل زوايا المربع مع المركز (A مع P، C مع P) فسنحصل على زاوية قائمة عند النقطة P، ومن ثَم فإن الزاوية APC أيضاً تساوي 90°.

حسناً، أنظر إلى الشكل في الأسفل، حيث قمنا برسم دائرة كإنشاء مساعد. بما أن الزاوية ABC تساوي 90° (معطى)، والزاوية APC تساوي 90° أيضاً، يمكننا رسم دائرة حول النقطة O تمر بالنقاط B، P. وبما أن القوس AP متطابق مع القوس PC، فإن الزاويتان المواجهتان لهذين القوسين متساويين. أي أن الزاويتين α، β متساويتان، وبما أن $\alpha = \beta$، فإن القطعة المستقيمة BP تنصف الزاوية ABC.



يوجد نظريتان هندسيتان ترتبطان بهذه المسألة هما:

نظرية 1.29 (نظرية ثاليز) (Thales' Theorem). الزاوية المحيطية المرسومة في نصف الدائرة والمنشأة على قطرها تكون قائمة.

مثال: الزاويتان ABC، APC هما زوايا منشأة على قطر الدائرة AC، ومن ثَم فهما زوايا قائمة.

نظرية 2.29 الزوايا التي تواجه أقواساً متطابقة من الدائرة تكون متطابقة.

مثال: بما أن القوس AP متطابق مع القوس PC، فإن الزاويتان α، β متطابقتان.

المسألة الثلاثون

الترتيب باستخدام المتوسط

جد الحد النوني (Nth Term) للمتتالية غير المنتهية:

$$-4, 7, -4, 7, ...?$$

المتتالية المعطاة تتكون من حدود متناوبة (Alternating): -4 ، 7. من المحتمل أن نكون قادرين على تمثيل الحد النوني من خلال دالة معينة في n، لنفرض أنها $f(n)$، ومهمتنا الآن هي إيجاد صيغة معينة للدالة $f(n)$. من خلال النظر إلى المتتالية نلاحظ أن: $f(1) = -4$ ، $f(2) = 7$ ، $f(3) = -4$ ، $f(4) = 7$ ، وهكذا. يوجد نمط واضح هنا وهو:

f (الفردي) $= -4$ ، f (الزوجي) $= 7$

يوجد بعض الطرائق والخدع الرياضية الأساسية للتعامل مع هذا النوع من المسائل، ولكني أود أن أوضح كيف يمكن لإستراتيجية المتوسط (Technique of Averaging) أن تفرض ترتيباً إضافيًا (Additional Order) على المسألة، وفي بعض الأحيان تتصرف قيمة المتوسط (Average Value) لمتغيرٍ ما أفضل من المتغير الأصلي.

في هذه المسألة، قيمة المتوسط لأي حدين متتاليين في المتتالية يساوي:

$$a = \frac{-4+7}{2} = \frac{3}{2}$$

لاحظ أن:

$$-4 < \frac{3}{2} < 7$$

أيضاً المتوسط $a=\frac{3}{2}$ يقع تماماً في المنتصف بين -4 ، 7 ، وذلك لأن $\frac{3}{2}-(-4)=\frac{11}{2}$ ، كما أن $7-\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$. هذه ملاحظات جميلة، ولكن كيف يمكننا الاستفادة منها؟

الفكرة المفتاحية في هذه المسألة هي أن نطرح $\frac{3}{2}$ (المتوسط) من كل حد من حدود المتتالية:

$$-4\ ,\ 7,\ -4, 7, \ldots$$

إذا قمنا بذلك سنحصل على المتتالية المعدَّلة (Modified Sequence) التالية:

$$-5.5\ ,\ 5.5,\ -5.5,\ 5.5, \ldots$$

هذه المتتالية الجديدة تتكون من حدود تتناوب بين -5.5 ، 5.5 . ومن الواضح أن التعامل مع هذه المتتالية الجديدة أسهل من التعامل مع المتتالية الأصلية لأن كل حد من حدودها هو ± 5.5 . وكل ما نحتاجه الآن هو أن نكتشف كيف نحصل على الإشارات المتناوبة للموجب والسالب. لاحظ ببساطة أن:

$(-1)^n=-1$ ، عندما تكون n عدداً صحيحاً فرديًّا

$(-1)^n=1$ ، عندما تكون n عدداً صحيحاً زوجيًّا

وهذا يعني أن الحد النوني للمتتالية الجديدة $-5.5\ ,\ 5.5,\ -5.5,\ 5.5, \ldots$ هو:

$$h(n)=(-1)^n(5.5)$$

ومن ثَم، فقد اكتشفنا صيغة للحد النوني للمتتالية الجديدة المعدَّلة، ولكن كيف نستطيع أن نجد صيغة لـ $f(n)$ وهو الحد النوني للمتتالية الأصلية؟ دعنا نفكر قليلاً، كيف قمنا بعمل المتتالية الجديدة؟ لقد قمنا بذلك من خلال طرح $\frac{3}{2}$ من كل حد من حدود المتتالية، ومن ثَم لكي نحصل على المتتالية الأصلية مرة جديدة، علينا أن نضيف $\frac{3}{2}$ لكل حد من حدود المتتالية المعدلة: $-5.5\ ,\ 5.5,\ -5.5,\ 5.5, \ldots$. وهذا يعني أن صيغة $f(n)$ التي نبحث عنها يمكن التعبير عنها بالشكل:

$$f(n)=(-1)^n(5.5)+\frac{3}{2}$$

يمكننا الآن بسهولة أن نتأكد من صحة هذه الصيغة، فمثلاً عندما $n=1$ نحصل على $f(1)=(-1)^1(5.5)+1.5=-4$ ، وعندما $n=2$ نحصل على $f(2)=(-1)^2(5.5)+1.5=7$ ، وهكذا.

المسألة الحادية والثلاثون

متطابقة مثلثية

أثبت المتطابقة المثلثية (Trigonometric Identity) التالية:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{8}\right)\ldots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

عندما أرى مسألة مثل هذه، أشعر بالحاجة لشرب فنجان من القهوة لتهدئة أعصابي. إن هذه المسألة تعيدنا للكوابيس التي مرت معنا عند دراسة حساب المثلثات في المدرسة الثانوية. كيف يمكن لنا أن نحل مسألة مثل هذه؟ طلبت منا المسألة أن نثبت شيئاً ما، وعلى الأرجح سنحتاج إلى دراسة بعض المتطابقات المثلثية الأساسية المناسبة مثل تلك التي تم الإشارة لها في الجزء المتعلق بالمثلثات في الملحق (B)، بالإضافة إلى استخدام بعض المعالجات الرياضية الذكية مثل الجمع، والطرح، والتعويض العكسي، فهذه عادةً الطريقة التي تعمل بها هذه الأشياء. ولكن أي من المتطابقات المثلثية الأساسية علينا أن نستخدم؟

عند هذه اللحظة، من المحتمل أنك طورت قدراتك المتعلقة بكيفية استكشاف المسائل الرياضية. دعنا نبدأ بالنظر إلى الحالات الخاصة والحالات المتطرفة. من الإستراتيجيات العامة الجيدة أن تدع المسألة تقترح الحل الخاص بها! وبدلاً من أن تقف مبهوراً في النظر إلى n، لاحظ ماذا يحدث عندما $n = 1$.

عندما $n = 1$ تصبح المتطابقة المعطاة على الشكل التالي:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sin\theta}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

ويمكن أن نعيد كتابتها بشكل أبسط على الشكل:

$$2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sin\theta$$

وقبل أن نذهب أبعد من ذلك، دعنا نبسط هذه العبارة من خلال التعويض $\varphi=\frac{\theta}{2}$، ومن ثَم تصبح العبارة على الصورة:

$$2\sin(\varphi)\cos(\varphi)=\sin(2\varphi)=\sin(\varphi+\varphi)$$

حسناً، هذه متطابقة مثلثية أساسية بسيطة من المفترض أنك تعرفها مسبقاً. إذاً ولغاية الآن نحن نعرف أن المتطابقة صحيحة بالتأكيد عندما $n=1$. لا نستطيع الهروب من الحاجة لتذكر بعض النظريات المهمة، مثل تلك الموجودة في الملحق (B). كنت أتمنى أن أستطيع القول إنك لست بحاجة لمراجعة أي شيء على الإطلاق، ولكن الأمر ليس كذلك، فالمراجعة والبحث جزءٌ مهمٌ من حل المسألة وبدونه لن تستطيع أن تكسب المعركة.

المسألة أخبرتنا ما هي المتطابقة المثلثية التي نحتاجها لحل المسألة:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sin\theta}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

ما الذي علينا فعله الآن؟ في المتطابقة السابقة، عوض $\frac{\theta}{2}$ بدلاً من θ لتحصل على:

$$\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^2}\right)}$$

والآن نعيد هذه العملية مرة أخرى، عوِّض $\frac{\theta}{2}$ بدلاً من θ في المعادلة الأخيرة لتحصل على:

$$\cos\left(\frac{\theta}{8}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^3}\right)}$$

يمكننا أن نستمر في هذه العملية بنجاح من خلال تعويض $\frac{\theta}{2}$ بدلاً من θ في كل مرة. والآن نقوم فقط بضرب هذه المتطابقات الصغيرة لنحصل على:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{8}\right)\ldots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)=\frac{\sin\theta}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^3}\right)}\cdots\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

لاحظ أن العديد من الأشياء تم اختصارها لنحصل على جواب جميل وبسيط، وعادةً هذا ما يحدث في الرياضيات، فالرحلة طويلة وشاقة، والمعاناة عظيمة، ولكن النتائج النهائية بسيطة وجميلة.

لحل المسألة الرياضية، يجب عليك أن تستكشفها، وأفضل طريقة للقيام بذلك هي النظر إلى الحالات الصغيرة، والحالات الخاصة، والحالات المتطرفة.

المسألة الثانية والثلاثون

حاصل ضرب زوجي

لتكن $a_1, a_2, ..., a_n$ إعادة ترتيب (Rearrangement) للأعداد $1, 2, ..., n$. إذا كانت n عدداً فرديًا، أثبت أن حاصل الضرب:

$$(a_1 - 1), (a_2 - 2), (a_3 - 3), ..., (a_n - n)$$

عددٌ زوجيٌّ.

في هذه المسألة المتتالية $a_1, a_2, ..., a_n$ يمكن أن تكون أي إعادة ترتيب للأعداد $1, 2, ..., n$. على سبيل المثال عندما $n = 5$ يمكن أن تكون $3, 5, 1, 4, 2$، أو قد تكون $1, 2, 3, 4, 5$، أو قد تكون أي تبديل (Permutation) للأعداد من 1 إلى 5. ومن ثَم فإن المسألة تطلب منا أن نثبت أن شيئًا ما غير متغير (Invariant) رياضيًا (كمية أو خاصية لا تتغير بتغير المسألة).

المسألة تطلب منا أن نبين أنه إذا كانت n عدداً فرديًا، فإن حاصل ضرب محدد يمثل عدداً زوجيًا، والمسألة تكاد تصرخ في وجوهنا لتطلب منا استخدام خصائص الأعداد الزوجية والفردية لحلها، دعنا نبدأ من خلال مراجعة بعض الحقائق الأساسية المتعلقة بالأعداد الصحيحة، وسنقوم فقط بعرض هذه الحقائق، ولكنها جميعها من السهل إثباتها أو برهانها.

- الخاصية 1. حاصل جمع عددين زوجيين يعطينا عدداً زوجيًا. مثال: $6 = 4 + 2$.
- الخاصية 2. حاصل جمع عددين فرديين يعطينا عدداً زوجيًا. مثال: $8 = 5 + 3$
- الخاصية 3. حاصل جمع عدد فردي مع عدد زوجي يعطينا عدداً فرديًا. مثال: $9 = 6 + 3$.

• الخاصية 4. حاصل جمع ثلاثة أعداد فردية يعطينا عدداً فرديًّا. مثال: $1+7+3=11$.

• الخاصية 5. حاصل ضرب عددين زوجيين يعطينا عدداً زوجيًّا. مثال: $2\times 4=8$.

• الخاصية 6. حاصل ضرب عددين فرديين يعطينا عدداً فرديًّا. مثال: $3\times 5=15$.

• الخاصية 7. حاصل ضرب عدد زوجي مع عدد فردي يعطينا عدداً زوجيًّا. مثال: $4\times 5=20$.

والآن لنعد إلى مسألتنا. حاصل الضرب في المسألة يحتوي على الحدود:

$$a_1-1 ، a_2-2 ، \ldots ، a_n-n$$

وكما هو معطى في المسألة فإن n عدد فرديّ. يوجد خياران أساسيان فقط يمكننا القيام بهما مع الحدود a_k-k، حيث يمكننا جمعها أو ضربها. حسناً دعنا نبدأ بالخيار الأول، ماذا يحدث إذا قمنا بجمع الحدود a_1-1 ، a_2-2 ، ... ، a_n-n؟

$$\begin{aligned}(a_1-1)+(a_2-2)+\ldots+(a_n-n)&=(a_1+a_2+\ldots+a_n)-(1+2+\ldots+n)\\&=(1+2+\ldots+n)-(1+2+\ldots+n)\\&=0\end{aligned}$$

وهو عدد زوجي. يوجد شيئان يجب ملاحظتهما هنا. أولاً: بما أن المتتالية $a_1,a_2,\ldots,a_n$ يمكن أن تكون أي إعادة ترتيب من الأعداد $1,2,\ldots,n$ ، فإن:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=1+2+\ldots+n$$

ثانياً: لاحظ أن الصفر هو عدد زوجي لأنه من مضاعفات العدد 2 .

بما أننا قد فرضنا n عدداً فرديًّا، فإن المجموع $(a_1-1)+(a_2-2)+\ldots+(a_n-n)$ يحتوي على عدد فردي من الحدود. إذا فرضنا أن كل حد من هذه الحدود a_k-k عدد فرديّ بحد ذاته، فإن المجموع يجب أن يكون عدداً فرديًّا (الخاصية 4)، ولكن هذا يناقض حقيقة أن $(a_1-1)+(a_2-2)+\ldots+(a_n-n)$ عدد زوجيّ. ومن ثَم فإن أحد الحدود a_k-k على الأقل يجب أن يكون عدداً زوجيًّا. إذًا باستخدام الخاصية 5، والخاصية 7 عندما نقوم بضرب جميع الحدود a_k-k لنحصل على $(a_1-1),(a_2-2),(a_3-3),\ldots,(a_n-n)$، فإن حاصل الضرب:

$$(a_1 - 1), (a_2 - 2), (a_3 - 3), \ldots, (a_n - n)$$

يجب أن يكون عدداً زوجيًا.

هذه المسألة لم تكن صعبة، ولكن التعامل مع كل هذه الأعداد الفردية والزوجية يصيب الفرد بالدوار. لإتقان حل مسائل كهذه عليك إتقان الخصائص النوعية (Parity) للأعداد الصحيحة (الخصائص من 1 إلى 7).

المسألة الثالثة والثلاثون

مربع كامل

أثبت أنه إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإن:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

مربع كامل (Perfect Square).

تطلب منا المسألة أن نثبت أنه إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإن:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=m^2$$

حيث m عدد صحيح موجب. ولكي تصبح المسألة مألوفة أكثر دعنا ننظر إلى بعض الحالات الخاصة. للمزيد من التبسيط افرض أن:

$$f(n)=n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

عندما $n=1$، فإن $f(1)=25=5^2$، وهذا يعني أن $f(1)$ مربع كامل. عندما $n=2$، فإن $f(2)=121=11^2$، وعندما $n=3$، فإن $f(3)=361=19^2$. إذن ومن خلال فحصنا لهذه الحالات الثلاث يبدو بالفعل أن:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

تمثل مربعاً كاملاً. كيف يمكن لنا أن نثبت ذلك؟ يوجد العديد من الطرائق لإثبات صحة هذه الجملة، والأمر يعود إليك في اختيار الطريقة التي تفضل استخدامها. يمكن لنا على سبيل المثال أن نثبت الجملة باستخدام الاستقراء الرياضي، كما يمكن لنا أن نستخدم الحساب المقياسي

(Modular Arithmetic) الذي ناقشناه في المسألة 13. على سبيل المثال يمكننا أن نستخدم حقيقة أن العدد الفردي المربع مطابق (Congruent) لـ $1(\bmod 8)$. الطريقة الأخرى لحل هذه المسألة التي عادةً ما تستخدم في حل المسألة الرياضية هي طريقة التحليل. يمكن لنا أن نبدأ من خلال كتابة $f(n)$ على الصورة:

$$f(n)=n(n+1)(n+2)(n+3)+1=n^4+6n^3+11n^2+6n+1$$

ثم نقوم بتحليل المقدار $n^4+6n^3+11n^2+6n+1$، ويمكننا التحايل باستخدام آلة حاسبة تحوي برناجاً لحل المعادلات الجبرية لإيجاد أن:

$$n^4+6n^3+11n^2+6n+1=\left(n^2+3n+1\right)^2$$

ومن الواضح أن هذا مربع كامل. حسناً، لقد انتهينا من حل المسألة.

ولكن كيف يمكن لنا أن نحلل العبارة $n^4+6n^3+11n^2+6n+1$ دون أن نلجأ لاستخدام الآلة الحاسبة. الطريقة العامة التي عادةً ما تستخدم في حل العديد من المسائل الرياضية تسمى طريقة المعاملات غير المعينة (Undetermined Coefficients). دعنا نحلل العبارة $n^4+6n^3+11n^2+6n+1$ باستخدام هذه الطريقة. بشكل أساسي نحن نريد أن نحلل العبارة من خلال كتابتها كحاصل ضرب كثيرتي حدود متطابقتين (على فرض أن هذا ممكن) كما يلي:

$$n^4+6n^3+11n^2+6n+1=\left(a_k n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_0\right)^2$$

مهمتنا الآن هي إيجاد المعاملات غير المعينة a_k، a_{k-1}، ...، a_0. نستطيع تبسيط المسألة من خلال التمهل قليلاً وعدم التسرع. أولاً، لاحظ أننا عندما نقوم بتربيع العبارة $a_k n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_0$ سنحصل على كثيرة حدود من الدرجة الرابعة، وهذا يعني أن $k=2$. ثانياً، وبما أن معامل n^4 يساوي 1 في الطرف الأيسر من المعادلة السابقة، لا بد أن نحصل على $a_k=a_2=1$. وأخيراً فإن $a_0=1$ لأن الحد الثابت في كثيرة الحدود $n^4+6n^3+11n^2+6n+1$ يساوي 1. إذاً المطلوب منا الآن هو أن نجد المعامل المجهول a بحيث:

$$n^4+6n^3+11n^2+6n+1=\left(n^2+an+1\right)^2$$

إذا قمنا بفك المقدار في الطرف الأيمن نحصل على:

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = n^4 + 2an^3 + (a^2 + 2)n^2 + 2an + 1$$

ومن خلال مقارنة معاملات أسس n في طرفي المعادلة نحصل على:

$$a^2 + 2 = 11 \text{ و } 2a = 6$$

ومن ثَم فإن $a = 3$. بالتأكيد فإن القيمة $a = 3$ تؤدي الغرض، حيث إن تعويض $a = 3$ في العبارة $\left(n^2 + an + 1\right)^2$ سيعطينا التحليل الذي نرغب به:

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = \left(n^2 + 3n + 1\right)^2$$

من الجيد أن تتذكر دائماً طريقة المعاملات غير المعينة. حيث يمكن استخدامها عندما يكون بإمكانك تحديد شكل العبارة الرياضية، وتحتاج فقط أن تجد المعاملات المجهولة.

المسألة الرابعة والثلاثون

الترتيب الصفي الرباعي

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً، أوجد جميع الترتيبات الصفية الرباعية (Ordered 4 - Tuples) للأعداد الصحيحة (a,b,c,d) بحيث:

$$0 \le a \le b \le c \le d \le n$$

إذا كانت $n = 10$ على سبيل المثال، فإن:

$$(a,b,c,d) = (2,2,5,7)$$

هي أحد الحلول لهذه المسألة، حيث إن:

$$0 \le 2 \le 2 \le 5 \le 7 \le 10$$

ومن الواضح أنه يوجد العديد من الحلول الأخرى (a,b,c,d) التي تحقق الشرط $0 \le a \le b \le c \le d \le n$. المسألة لم تطلب منا أن نجد جميع الحلول، ولكنها تطلب منا أن نجد عدد الحلول الموجودة، من السهل أن تكتشف أن هذه المسألة تتعلق بالتركيبات (Combinatorics) .

سيكون من الجميل حقاً لو كان باستطاعتنا أن نفرض أن (a,b,c,d) هي أي تركيب مرتب ومتزايد من أربعة أعداد يتم اختيارها من المجموعة:

$$A = \{0,1,2,...n\}$$

عندئذ سيكون عدد التراكيب (Combinations) الرباعية التي يمكن تكوينها من المجموعة A التي تحوي $n+1$ من العناصر:

$$\binom{n+1}{4}=\frac{(n+1)!}{4!(n-3)!}$$

هنا عليك أن تتذكر أن:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

تعبِّر عن عدد التركيبات التي يمكن فيها انتقاء (k) من العناصر من ضمن (n) من العناصر المتوفرة (دون تكرار الانتقاء). ولكن للأسف هذه الطريقة لن تعمل هنا؛ لأن بعض أو كل الأعداد a ، b ، c ، d يمكن أن يكون متساويًا، وبمعنى آخر يمكن أن يحصل تكرار للأعداد في (a,b,c,d) . على سبيل المثال $(0,0,0,0)$ هو أحد الحلول؛ لذلك ولكي تصبح هذه الطريقة أو الفكرة صالحة يجب علينا أن نجد مجموعة من الأعداد B بحيث يكون كل تركيب مكون من أربعة عناصر مختلفة $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ يتم اختيارها من المجموعة B ، مرتبة على الشكل $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ ، بحيث $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ ، تناظر بشكل وحيد أحد الحلول (a,b,c,d) لمسألتنا الأصلية. عندئذ إذا كان $|B|$ يعبر عن حجم المجموعة B ، فإن جواب مسألتنا سيكون:

$$\binom{|B|}{4}$$

والسؤال الآن، كيف يمكن لنا أن نبني أو ننشئ المجموعة B ؟

في المسألة الأصلية (a,b,c,d) يجب أن تحقق الشرط $0\le a\le b\le c\le d\le n$. وبما أن $a\le b$ وكلا العددين a ، b أعداد صحيحة غير سالبة، فإن هذا يعني أن $a<b+1$ ، ومن ثَم فإن:

$$0\le a<b+1$$

أيضاً بما أن $b\le c$ ، فإن هذا يعني أن $b<c+1$ ، و $b+1<c+2$ ، ومن ثَم فإن:

$$0\le a<b+1<c+2$$

وبما أن $c\le d$ ، فإن هذا يعني أن $c<d+1$ ، و $c+2<d+3$ ، ومن ثَم فإن:

$$0\le a<b+1<c+2<d+3$$

وأخيراً، وبما أن $d\le n$ ، فإننا نستطيع الحصول على نتيجتنا النهائية:

$$0 \le a < b+1 < c+2 < d+3 \le n+3$$

والآن إذا جعلنا $\alpha = a$ ، $\beta = b+1$ ، $\gamma = c+2$ ، $\delta = d+3$ ، سنحصل على:

$$0 \le \alpha < \beta < \gamma < \delta \le n+3$$

لقد قمنا بتحويل القيد في المسألة الأصلية من ($\le$) إلى ($<$). والآن إذا اخترنا أي أربعة أعداد مختلفة $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ من المجموعة $B = \{0,1,2,\ldots,n+3\}$ ، بحيث $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ ، سنحصل على جواب لمسألتنا الأصلية. وكل ما نحتاجه بعد اختيار $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ هو تحويلها إلى (a,b,c,d) من خلال استخدام التحويلات:

$$d = \delta - 3 \text{ ، } c = \gamma - 2 \text{ ، } b = \beta - 1 \text{ ، } a = \alpha$$

بما أن المجموعة $B = \{0,1,2,\ldots,n+3\}$ تحوي $(n+4)$ عنصراً أو رقماً، فإن الجواب عن مسألتنا الأصلية:

$$\binom{|B|}{4} = \binom{n+4}{4}$$

وبمعنى آخر، عدد الترتيبات الصفية الرباعية من الأعداد الصحيحة (a,b,c,d) التي تحقق $0 \le a \le b \le c \le d \le n$ يساوي:

$$\binom{n+4}{4}$$

المسألة الخامسة والثلاثون

معادلة لوغاريتمية

جد مجموعة الحل للمعادلة:

$$\log_x 5 - 2\log_{5x} 5 - 4\log_{25x} 5 = 0$$

حيث x عدد حقيقي.

لدينا معادلة غريبة نوعاً ما تحوي لوغاريتمات، ونريد أن نجد قيمة x. من المحتمل عدم وجود أي عدد حقيقي x يحقق المعادلة، كما أنه من المحتمل وجود أكثر من قيمة لـ x تحقق المعادلة المعطاة. هذه أسئلة أساسية (الوجود والوحدانية) يجب علينا أخذها بعين الاعتبار عندما يطلب منا أن نجد مفردة رياضية معينة. دعنا هنا نفرض أنه يوجد عدد حقيقي x يحقق المعادلة ونرى ماذا سيحدث.

إذا رغبنا بحل هذه المعادلة بنجاح، نحتاج إلى شيئين مهمين. أولاً، سنحتاج إلى معالجة المعادلة جبريًا لعزل أو فصل x، وذلك على الرغم أنه ليس من الواضح بشكل مباشر كيف سنفعل ذلك. ثانياً، سنحتاج على الأغلب لاستخدام خصائص اللوغاريتمات. لذا، دعنا نبدأ من هنا، ونقوم بمراجعة خصائص اللوغاريتمات ونرى إذا كان يوجد أي شيء قد يساعدنا في حل مسألتنا.

فيما يلي مجموعة من الخصائص المفيدة للوغاريتمات، وجميعها عبارة عن نظريات، ولكننا لن نقدم براهينها هنا.

١ - إذا كانت b عدداً حقيقيًا بحيث $b > 0$، فإن $\log_b 1 = 0$.

٢ - قاعدة التطابق (Identity Rule): إذا كانت b عدداً حقيقيًّا بحيث $b > 0$، فإن $\log_b b = 1$.

٣- قاعدة الجمع: إذا كانت b عدداً حقيقيًّا بحيث $b > 0$ ، فإن $\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$ ، حيث m ، n أعداد حقيقية موجبة.

٤- قاعدة الطرح: إذا كانت b عدداً حقيقيًّا بحيث $b > 0$ ، فإن $\log_b(m/n) = \log_b m - \log_b n$ ، حيث m ، n أعداد حقيقية موجبة.

٥- قاعدة السلسلة (Chain Rule) : إذا كانت a ، b ، c أعداداً حقيقية موجبة بحيث $a \neq 1$ ، $b \neq 1$ ، فإن $\log_a b \, . \, \log_b c = \log_a c$.

٦- قاعدة المقلوب: إذا كانت a ، b أعداداً حقيقية موجبة بحيث $a \neq 1$ ، $b \neq 1$ ، فإن $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

٧- قاعدة المعكوس: إذا كانت b عدداً حقيقيًّا موجباً بحيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b(b^a) = a$.

٨- قاعدة الأس (Exponent Rule) : إذا كانت a ، b أعداداً حقيقية موجبة بحيث $b \neq 1$ ، وكان n عدداً حقيقيًّا ، فإن $\log_b(a^n) = n \log_b a$.

إذا دققت النظر في الخصائص السابقة للوغاريتمات، قد تلاحظ أن القاعدة التي نحتاجها لحل مسألتنا هي قاعدة المقلوب. لماذا؟ لأن قاعدة المقلوب تقوم بعملية تبديل بين الأساس والقاعدة (Argument) ، وبمعنى آخر فإن قاعدة المقلوب تحول $\log_a b$ إلى $\frac{1}{\log_b a}$ ، أي إن قاعدة المقلوب سوف تحول $\log_x 5$ إلى $\frac{1}{\log_5 x}$. حسناً، هذا شيء جيد لأنه يرسل القيمة المجهولة x إلى خارج الأساس. من الواضح أن التعامل مع $\log_5 x$ أسهل بكثير من التعامل مع $\log_x 5$.

من خلال تطبيق قاعدة المقلوب على كل حد من حدود المعادلة $\log_x 5 - 2\log_{5x} 5 - 5\log_{25x} 5 = 0$ نحصل على:

$$\frac{1}{\log_5 x} - \frac{2}{\log_5 5x} - \frac{4}{\log_5 25x} = 0$$

ومن الواضح أن هذه المعادلة أبسط من المعادلة الأصلية، لأن جميع اللوغاريتمات أصبح لها نفس الأساس (الأساس 5). والآن سنقوم بإجراء بعض العمليات الجبرية لتبسيط المعادلة.

افرض $y = \log_5 x$. إذاً:

$$\log_5(5x) = \log_5(5) + \log_5(x) = 1 + y$$

أيضاً:

$$\log_5(25x) = \log_5(25) + \log_5(x) = \log_5(5^2) + \log_5(x) = 2 + y$$

إذاً، ومن خلال التعويض في المعادلة نحصل على:

$$\frac{1}{y} - \frac{2}{1+y} - \frac{4}{2+y} = 0$$

وبعد تبسيط هذه المعادلة، نحصل على المعادلة التالية:

$$5y^2 + 5y - 2 = 0$$

هذه معادلة تربيعية. إذا استخدمنا الصيغة التربيعية (انظر إلى نظرية 1.23 في المسألة 23) لحلها نحصل على:

$$y = \frac{-5 \mp \sqrt{65}}{10}$$

وبما أن $x = 5^y$، فهذا يعطينا حلين حقيقيين للمعادلة: $\log_x 5 - 2\log_{5x} 5 - 4\log_{25x} 5 = 0$

$$x = 5^{\left(-5 \mp \sqrt{65}\right)}$$

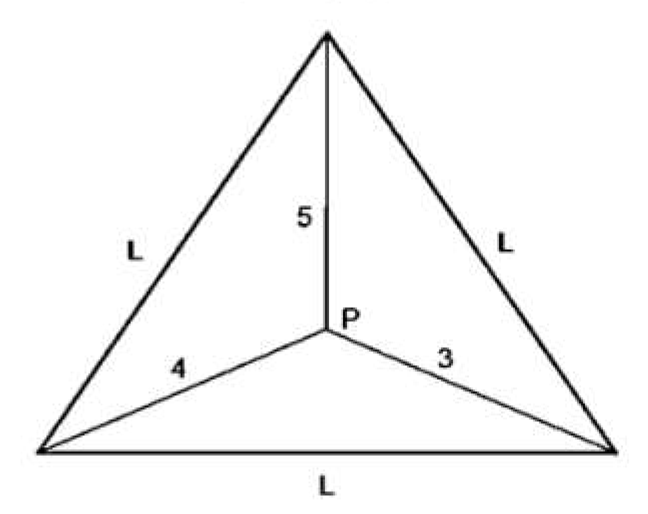
خاتمة

حكاية الاكتشاف الرياضي

درسنا الأخير في فن حل المسألة الرياضية يتعلق بالقصة الحقيقية لكيفية اكتشاف نظرية هندسية ممتعة ومثيرة. تظهر لنا هذه القصة كيف تعمل عملية الاستقصاء والاستكشاف على أرض الواقع، كما أنها توضح كيف يمكن لك أن تكتشف النظريات الرياضية الجديدة.

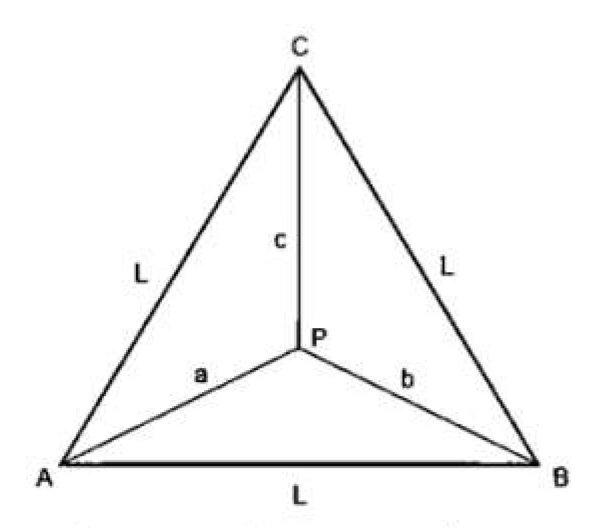
نادراً ما يوجد الإبداع في الفراغ، ومن ثَم، وكما هو الحال في الرياضيات، نحن دائماً بحاجة لنقطة معينة كي نبدأ من عندها، نحن بحاجة لمسألة رياضية جيدة لنبدأ العمل عليها، ويمكن لك أن تنظر لهذه المسألة باعتبارها بذرة بحاجة للرعاية لكي تنمو وتكبر لتصبح شجرة.

وفي أحد الأيام كنت أقرأ كتاب الرياضيات السريعة (Mathematical Quickies) للمؤلف شارلز تريغ (Charles W. Trigg) (الملحق D، قراءات مطلوبة)، وبالتحديد كنت أنظر إلى المسألة رقم 201 التي تحمل العنوان: مقاطع تحدد مثلث متساوي الأضلاع (Segments Determining an Equilateral Triangle) ، وهي أحد المسائل الكلاسيكية في الهندسة الإقليدية. هذه المسألة تعطينا مثلثاً متساوي الأضلاع كما هو موضح في الشكل التالي، النقطة P تقع داخل المثلث بحيث تكون أطوال القطع المستقيمة التي تصل بين النقطة P ورؤوس المثلث 3، 4، 5. والتحدي هو إيجاد الطول L الذي هو طول ضلع المثلث المتساوي الأضلاع.

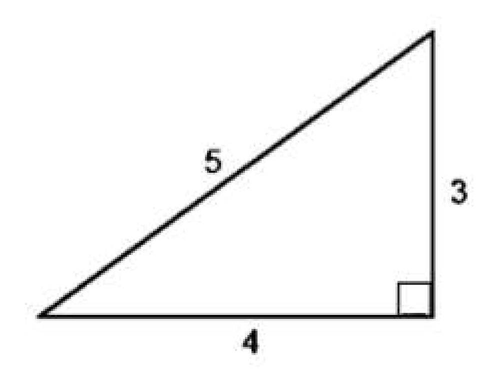


لاحظ أن المسألة تطلب منا إيجاد حل محدد للحالة الخاصة عندما تكون أطوال القطع المستقيمة التي تصل بين النقطة P ورؤوس المثلث 3، 4، 5. ويقدم الكتاب حلاً مبتكراً اعتماداً على هندسة المرحلة الثانوية، ولسنا هنا بصدد ذكر تفاصيل هذا الحل، لأن هذا ليس هدفنا، ولكن الحل المذكور في الكتاب يعتمد على حقيقة وجود شيء خاص جدًا يتعلق بالأرقام 3، 4، 5. وبشكل أساسي يوجد لدينا مثلث فيثاغورث القائم الزاوية الذي أطوال أضلاعه 3، 4، 5. وهذه بالضبط هي الحقيقية التي سمحت لنا بحل المسألة بهذه الطريقة الذكية. يؤول حل هذه المسألة إلى $L=\sqrt{25+12\sqrt{3}}$، أو $L\approx 6.7664$. ولكن هذا الحل هو حلٌ للحالة الخاصة فقط.

هذا جميل جدًا، ولكن يوجد لدينا مشكلة واحدة، ماذا يحدث لو حددنا نقطة عشوائية P داخل المثلث المتساوي الأضلاع بحيث تكون أطوال القطع المستقيمة التي تصل بين النقطة P ورؤوس المثلث a، b، c، وليس 3، 4، 5. حصراً. كيف يمكن لنا أن نجد L (طول ضلع المثلث) لهذه المسألة العامة. هذه طريقة مشتركة يستخدمها الرياضيون لاختراع أو اكتشاف الرياضيات الجديدة. أولاً سنقوم بحل الحالة الخاصة، ثم بعد ذلك نقوم بالبحث والاستقصاء لمحاولة معرفة كيفية حل المسالة العامة، ويمكن التعبير عن المسألة العامة من خلال الشكل الموضح التالي، والمطلوب هو إيجاد قيمة L كدالة بدلالة كل من: a، b، c.



كيف يمكننا حل هذه المسألة العامة؟ المسار الأول الواضح هو أن نسير على نفس النهج الذي استخدمناه لحل الحالة الخاصة، ولكن للأسف هذا لن يكون مجديًا، حيث إن حل الحالة الخاصة اعتمد بالأساس على أن الأطوال 3، 4، 5. تشكل أطوال أضلاع نوعٍ خاصٍّ من المثلثات القائمة الزاوية:



وبشكل عام، الأضلاع a، b، c لا تشكل مثلثاً فيثاغوريًّا قائم الزاوية، وهذا يعني أن الطريق الذي استخدمناه لحل الحالة الخاصة لن يعمل هنا، ومن ثَم فنحن بحاجة للبحث عن طريقة أخرى.

الطريقة التقليدية لحل هذه المسألة تقوم على ملاحظة أن مساحة المثلث ABC تساوي مجموع مساحات المثلثات APC، CPA، BPA:

مساحة (ABC) $=$ مساحة(APC) + مساحة (CPA) + مساحة (CPA)

وبما أننا نريد أن نجد الطول L بدلالة الأطوال a ، b ، c ، فيمكننا استخدام قاعدة هيرونز (Heron's Formula) المتعلقة بحساب مساحات المثلثات (الملحق B)، وهذه القاعدة تقودنا إلى المعادلة المملة والبشعة التالية:

$$\sqrt{3}L^2 = \sqrt{(a+b+L)(-a+b+L)(a-b+L)(a+b-L)} + \sqrt{(a+c+L)(-a+c+L)(a-c+L)(a+c-L)} + \sqrt{(b+c+L)(-b+c+L)(b-c+L)(b+c-L)}$$

ومن ثَم فإننا نستطيع حل هذه المسألة من خلال حل هذه المعادلة التي تتضمن العديد من الجذور التربيعية بالنسبة إلى L . ولو عملت بجد ومثابرة، وبقيت تعمل لمدة أسبوع ولوقت متأخر من الليل على هذه الحسابات الجبرية الطويلة، فإن أفضل ما ستحصل عليه هو الصيغة التالية:

$$L = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\sqrt{3}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}}{\sqrt{2}}$$

إذا كان لدينا نقطة تقع داخل مثلث متساوي الأضلاع، فإن هذه القاعدة تعطينا طول ضلع المثلث L بدلالة الأطوال: $a = AP$ ، $b = BP$ ، $c = CP$.

والآن أنا لا أقول إن هذا شيء تود أن تقوم به فعلاً، فطريقة حل الهجوم الغاشم الجبرية تعمل هنا إذا توفرت لديك الرغبة بالقيام بكمية كبيرة من الحسابات الطويلة والشاقة.

حسناً، نحن نعرف الآن كيف يبدو جواب المسألة، هل نستطيع "تلميع الحجر" والحصول على شيء ما أكثر جمالاً من الصيغة السابقة؟ وهذه النقطة التي تصبح عندها الرياضيات فناً جميلاً، وكما يفعل الفنان علينا الآن أن نرجع للخلف وندقق النظر في المعادلة التي أمامنا علّنا نجد شيئًا ما يمكّننا من تحسين اللوحة (المعادلة) التي أمامنا. وخلال هذه النظرة التأملية قد نلاحظ أن هذه الصيغة عبارة عن معادلة، وإذا قمنا بتجاهل بعض الحدود غير السالبة في الطرف الأيمن من هذه المعادلة قد نستطيع تحويلها إلى متباينة.

لماذا نحتاج إلى كل هذه الخردة (Junk) على الطرف الأيمن من المعادلة مثل $\sqrt{3}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}$ ؟ هذه الخردة يجب أن تكون غير سالبة، لأننا نعرف أن L عدد حقيقيّ غير سالب، وهو موجود فعليًا. إذن، يمكننا الآن ببساطة أن نزيل أو نسقط هذا الجزء من الطرف الأيمن من المعادلة، لنحصل على هذه المتباينة الجميلة:

$$L \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$$

دعنا نختبر هذه المتباينة من خلال الحالة الخاصة عندما $(a,b,c)=(3,4,5)$:

$$L \geq \sqrt{\frac{3^2+4^2+5^2}{2}}=5$$

وهذا ليس سيئاً جدًّا؛ لأن الحل لهذه الحالة الخاصة كان $L \approx 6.7664$. وفي الحقيقية فإن المتباينة:

$$L \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$$

هي أفضل ما يمكننا الحصول عليه، حيث إنه وفي بعض الأحيان يمكننا فعليًا الحصول على المساواة، وهذه المساواة تتحقق على سبيل المثال إذا كانت النقطة P التي تقع داخل المثلث ABC تتطابق مع أحد النقاط A ، أو B ، أو C .

دعنا الآن نراجع بشكل سريع الخطوات التي قمنا بها، لقد بدأنا بمسألة هندسية تشكل حالة خاصة ويمكن حلها بطرائق خاصة، ثم بعد ذلك قمنا بتعميم المسألة وبدأنا بمحاولات لحل المسألة العامة، وللوصول إلى حل لهذه المسألة العامة قمنا باستخدام حسابات جبرية مضنية وطويلة لإيجاد صيغة صريحة تجد لنا L بدلالة كل من: a ، b ، c . بعد ذلك قمنا "بتلميع الحجر" من خلال إزالة الأجزاء البشعة من هذه الصيغة لنحصل على المتباينة الجميلة:

$$L \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$$

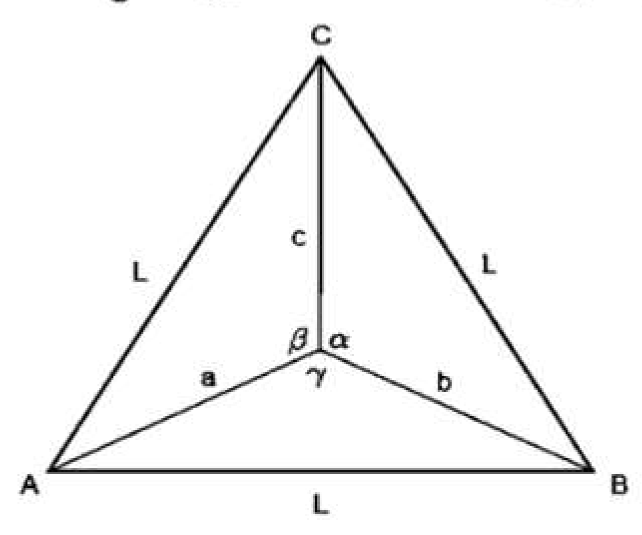
الآن نحن نعرف كيف تبدو هذه المتباينة، ولكن يجب علينا أن نسأل أنفسنا: هل نحن قادرون على إثبات هذه المتباينة بطريقة مباشرة باستخدام إثبات بسيط وأنيق.

هل يمكن لنا أن نجد برهاناً بسيطاً وأنيقاً لهذه المتباينة؟ من أين علينا أن نبدأ رحلة البحث عن هذا البرهان الجميل؟ عندما ندقق النظر في هذه المتباينة نلاحظ أنها تحتوي على مجموع مربعات:

$$a^2 + b^2 + c^2$$

هل نعرف أي نظريات هندسية تتضمن مجموع مربعات؟ بالتأكيد نعرف، إنه قانون جيوب التمام (الملحق B، المثلثات).

خذ بعين الاعتبار هذه الحالة العامة للمثلث المتساوي الأضلاع:



يوجد ثلاثة مثلثات يمكننا أن نطبق عليها قاعدة جيوب التمام، ومن ثَم سنحصل على ثلاث معادلات:

$$L^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$L^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$L^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

بما أن المتباينة $L \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$ تتضمن العدد 2 في المقام، يبدو أننا بحاجة لجمع معادلتين فقط من المعادلات الثلاث التي حصلنا عليها من قانون جيوب التمام. ولكن السؤال الآن هو أي معادلتين

من هذه المعادلات الثلاث سنقوم بجمعها؟ الفكرة التي قد تساعدنا في الاختيار هي أن واحدة من الزوايا α ، β ، γ على الأكثر يمكن أن تكون حادة (قياسها أقل من 90°)، وهذا يعني أن زاويتين على الأقل من هذه الزوايا هي زوايا منفرجة. للتسهيل دعنا نفترض أن α ، γ هما الزاويتان المنفرجتان، والآن اجمع المعادلتين اللتين تحتويان α ، γ :

$$L^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$L^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

وهذا يعطينا المعادلة:

$$2L^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ab\cos\gamma - 2ab\cos\alpha$$

وبما أن الزاويتين α ، γ منفرجتان، نحصل على:

$$-2ab\cos\gamma \geq 0$$
$$-2ab\cos\alpha \geq 0$$

وهذا يعني أنه باستطاعتنا أن نسقط هذه الحدود من الطرف الأيمن من المعادلة:

$$2L^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ab\cos\gamma - 2ab\cos\alpha$$

لنحصل على المتباينة:

$$2L^2 \geq a^2 + 2b^2 + c^2$$

والآن يمكننا أن نسقط الحد b^2 من الطرف الأيمن لنحصل على المتباينة:

$$2L^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

وبقسمة الطرفين على العدد 2 وأخذ الجذر التربيعي، نحصل مباشرة على المتباينة التي نبحث عنها:

$$L \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$$

برهاننا الأولي لهذه المتباينة قام على استخدام الحسابات الجبرية الطويلة، وبعد أن اكتشفنا المتباينة لاحظنا أنه لا بد أن من وجود طريقة أسهل لاشتقاقها، ومن خلال ملاحظة شكل المتباينة،

قمنا باختيار بعض النظريات الواعدة، ووجدنا برهاناً جميلاً للمتباينة، وهذه الخطوات توضح الطريقة التي تتم من خلالها الاكتشافات الرياضية على أرض الواقع. فالرياضيات لا تجلس مسترخية مساء يوم الأحد وتنتج بالصدفة النظريات الرياضية الرائعة، فالاكتشافات الرياضية العظيمة عادةً ما تكون نتاجاً للعمل الشاق والمجهود المضني. وكلمة السر هي إيجاد مسألة رياضية مميزة، والعمل عليها من خلال طرح أسئلة أساسية جيدة تتعلق بالمسألة، والعمل بجد واجتهاد لوقت طويل حتى الوصول إلى نتائج مثيرة وممتعة، وبعد ذلك قم بالتشطيبات اللازمة للعمل وحول اكتشافك إلى عمل جميل يلقى الاستحسان والتقدير من الجميع.

أتمنى لك الأفضل في استطلاعاتك الرياضية المستقبلية، ولا تنسى أن لديك كل ما تحتاجه لاكتشاف الرياضيات الجديدة والرائعة: عقل جيد، وورقة، وقلم رصاص.

الملاحق

الملحق (A): مسلّمات حل المسألة

المسلمة ١: أتقن الأساسيات، وعندما تشعر أنك فقدت الطريق ارجع دائماً إلى المبادئ الأساسية.

المسلمة ٢: حتى أكبر الرياضيين وأكثرهم شهرة لديهم صعوبات في فهم الرياضيات.

المسلمة ٣: الحظ يميل إلى الإنسان الجريء؛ لذا تعامل مع المخاطر بجرأة.

المسلمة ٤: تقبل المعاناة، فالفشل جزء من العملية، والعقبات هي الطريق الذي يوصلك للحل.

المسلمة ٥: افهم المسألة، فأنت لا تستطيع أن تحل المسألة التي لا تفهمها.

المسلمة ٦: لكي تستطيع أن تحل مسألة رياضية، يجب أن تستكشفها أولاً.

المسلمة ٧: حدد بوضوح الأشياء البديهية والواضحة، فغالباً ما تكون هذه الأشياء المفاتيح التي توصلك لحل مسألتك.

المسلمة ٨: النتائج تتناسب مع كمية العمل الشاق الذي تستثمره في المسألة.

المسلمة ٩: في الرياضيات، العبقرية هي نتاج للعمل الشاق.

المسلمة ١٠: الجيدون في حل المسائل هم الذين يتميزون بالمرونة في التعامل معها.

المسلمة ١١: حدد إستراتيجيتك لـ "الهجوم الغاشم". كيف ستحل هذه المسألة لو كنت أحمقاً.

المسلمة ١٢: من الأسهل أن تجد حلاً للمسألة إذا كنت تعرف الجواب مسبقاً.

المسلمة ١٣: انظر إلى الحالات الصغيرة، والحالات الخاصة، والحالات الموسعة.

المسلمة ١٤: حاول حل مسألة أكثر عمومية تتضمن مسألتك كحالة خاصة.

المسلمة ١٥: استخدم التماثل، وإذا لم يكن موجوداً حاول الحصول عليه بطريقة مصطنعة.

المسلمة ١٦: انظر إذا ما كانت مسألتك مكافئة أو شبيهة بمسألة أخرى تعرف حلها.

المسلمة ١٧: ابحث عن الأنماط، وسجل تخميناتك.

المسلمة ١٨: إذا كانت المسألة في نظرية الأعداد أو في التوافقية فابحث عن أرقامك في مثلث باسكال.

المسلمة ١٩: لا تحاول أن تكون ذكيًا، فقط استكشف المسألة وانظر إلى أين يأخذك هذا.

المسلمة ٢٠: دع المسألة تقترح الحل الخاص بها (انظر المسألة 31).

المسلمة ٢١: من المؤكد أنك لن تكون قادراً على حل جميع المسائل الرياضية التي تواجهك.

المسلمة ٢٢: المارسة، ثم المارسة، ثم المارسة.

المسلمة ٢٣: الحلول القبيحة عادةً ما تسبق الحلول الجميلة.

المسلمة ٢٤ : اتبع عاطفتك وتجاهل ما يقوله الخبراء، فالخبراء عادةً ما يكونون على حق، ولكنهم حين يخطئون يفعلون ذلك بشكل مذهل.

الملحق (B): نظريات مفيدة

هذا الملحق يحتوي مجموعة من النظريات المفيدة التي من الجيد أن تتطلع عليها وتراجعها، وهي في الحقيقة تشبه الأدوات الموجودة في صندوق الأدوات يمكن استخدامها وقت الحاجة. وبالتأكيد فإن هذه المجموعة ليست كاملة أو شاملة، ولكنها مكان جيد لنبدأ منه. معرفة العديد من النظريات الجيدة سوف يساعدك على إيجاد موطئ قدم للتعامل مع العديد من المسائل الرياضية من خلال مساعدتك على البدء في استكشافاتك واستقصاءاتك المتعلقة بالمسألة.

الجبر

نظرية. لأي عدد حقيقي x:

$$x\left(1-x\right)\leq\frac{1}{4}$$

نظرية. لأي عدد حقيقي $x>0$:

$$x+\frac{1}{x}\geq 2$$

متباينة بيرنولي (Bernoulli's Inequality). لأي عدد حقيقي $x>-1$، وعدد طبيعي n:

$$(1+x)^{n}\geq 1+nx$$

متباينة المثلث (Triangle Inequality). لأي متجهين x، y في الفضاء $\mathbb{R}^n$

$$\left|\mathbf{x}+\mathbf{y}\right|\leq\left|\mathbf{x}\right|+\left|\mathbf{y}\right|$$

حيث:

$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|=|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$ إذا وفقط إذا كانت x، y متناسبتين. لاحظ أن الرمز $|\mathbf{x}|$ يعبر عن كمية المتجه $\mathbf{x}$.

متباينة كوشي للوسط الحسابي – الهندسي (Cauchy's Arithmetic – Geometric Mean Inequality). إذا كانت $x_1,x_2,\ldots,x_n$ أعداداً حقيقية موجبة، فإن:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)^{1/n}$$

وتنطبق المساوة إذا وفقط إذا كانت جميع القيم متساوية: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

وتنص هذه النظرية على أن الوسط الحسابي لمجموعة من الأعداد الحقيقية الموجبة دائماً ما يكون أكبر أو يساوي الوسط الهندسي.

تعريف – الوسط التوافقي (**Harmonic Mean**). إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **أعداد حقيقية موجبة،** نعرف الوسط التوافقي لهذه الأعداد من خلال المعادلة:

$$H = \frac{n}{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

وإذا كانت A تمثل الوسط الحسابي لهذه القيم، وكانت G تمثل الوسط الهندسي، وكانت H تمثل الوسط التوافقي، فإن:

$$A \geq G \geq H$$

نظرية. المتتالية المحدودة المطردة دائماً تكون متقاربة

اختبار الجذر النسبي (**Rational Root Test**). إذا كان $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 = 0$ كثيرة حدود جميع معاملاتها موجبة، وإذا كان $x = a / b$ جذراً نسبيًا مكتوباً بأبسط صورة، فإن b تقسم c_n، و a تقسم c_0. هذه النظرية عادةً ما تستخدم في إثبات أن عدداً معطى هو عدد غير نسبي.

نظرية الباقي (**Polynomial Remainder Theorem**). باقي قسمة كثيرة الحدود $p(x)$ على $(x-a)$ يساوي $p(a)$.

نظرية تحليل كثيرة الحدود (**Polynomial Factor Theorem**). العدد a جذر لكثيرة الحدود $p(x)$ إذا وفقط إذا كانت $(x-a)$ تقسم $p(x)$.

نظرية التطابق لكثيرات الحدود (**Identity Theorem for polynomials**). ليكن $p(x)$، $q(x)$ كثيرتي حدود معرفتين على مجال كامل غير منتهٍ (Infinite Integral Domain)، وكليهما درجته أقل أو يساوي n .

إذا كان $p(x)$، $q(x)$ يمتلكان قيماً متساوية عند $(n+1)$ أو أكثر من قيم x المختلفة، فإن كثيرتي الحدود متطابقتان (Identical).

قاعدة ديكارت للإشارات (Descarte's Rule of Signs). لتكن $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0 = 0$ كثيرة حدود معاملاتها حقيقية، إذا كتبنا إشارات $(+,-)$ المعاملات غير الصفرية بالترتيب، فإن عدد الجذور الموجبة أقل أو يساوي عدد التغيرات في الإشارة (The Number of Sign Changes). مثلاً إذا أخذنا كثيرة الحدود $p(x) = 8x^9 - 7x^6 - 4x^5 + 3x^3 + 1$، فإن الإشارات بالترتيب هي: +، —، —، +، + . وهذا يعني أن عدد التغيرات في الإشارة في هذه المتتالية يساوي 2 (موجب إلى سالب، و سالب إلى موجب)، ومن ثَم فإن عدد الجذور الموجبة للمعادلة $p(x) = 0$ أقل أو يساوي 2.

معادلات نسبية (Rational Equations). لتكن $p(x)$، $q(x)$ كثيرات حدود. مجموعة الحل S للمعادلة النسبية $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ هي المجموعة:

$$S = \{x :\ p(x) = 0,\ q(x) \neq 0\}$$

نظرية. كثيرة الحدود من الدرجة أقل أو يساوي n يمكن تحديدها بالكامل بشكل وحيد من خلال معرفة قيمتها عند $(n+1)$ من النقاط.

متباينة هايجين (Huygen's Inequality). إذا كانت $0 < x < \pi/2$، فإن:

$$2\sin x + \tan x \geq 3x$$

متباينة كوشي – شوارز (Cauchy – Schwarz Inequality). إذا كانت $a_1, a_2, ..., a_n$، و $b_1, b_2, ..., b_n$ جميعها أعداداً حقيقية، فإن:

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right)$$

وتنطبق المساواة إذا كانت a_j تتناسب مع b_j لكل $1 \leq j \leq n$. وتنص هذه النظرية على أن مربع مجموع حاصل الضرب أقل أو يساوي حاصل ضرب مجموع المربعات.

المرافق (Conjugate). مرافق العدد $a + b\sqrt{d}$ هو العدد $a - b\sqrt{d}$، ويوجد تعريف آخر للمرافق نستخدمه عند التعامل مع الأعداد المركبة: مرافق العدد $a + bi$ هو العدد $a - bi$.

تعريف – القيمة المطلقة (Absolute Value). لأي عدد حقيقي x، تعرف القيمة المطلقة للعدد x كما يلي:

$$|x| = \begin{cases} x & if\, x \geq 0 \\ -x & if\, x < 0 \end{cases}$$

كما أن:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

القيمة المطلقة (Absolute Value). إذا كانت x، y أعداداً حقيقية، فإن:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$
$$|xy| = |x||y|$$
$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$$

تحليل (Factorization).

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

تحليل إلى العوامل. إذا كانت n عدد فردي، فإن:

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

تعريف – الدالة المحدبة (Convex Function). إذا كانت $f(x)$ دالة حقيقية القيمة ومتصلة على فترة ما، فإن $f(x)$ تسمى دالة محدبة، إذا كان لأي نقطتين x، y في الفترة، فإن:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

متباينة جنسن (Jensen's Inequality). لتكن $f(x)$ دالة حقيقية القيمة لمتغير حقيقي x. تكون الدالة $f(x)$ محدبة إذا وفقط إذا لجميع قيم u و v في مجال f ولجميع قيم t بحيث $0 \leq t \leq 1$، فإن:

$$f\left(tu+\left(1-t\right)v\right)\le t.f\left(u\right)+\left(1-t\right)f\left(v\right)$$

نظرية دي موافر (De Moivre's Theorem). إذا كانت n عدداً طبيعيًّا، فإن:

$$\left(\cos x+i\sin x\right)^n=\cos\left(nx\right)+i\sin\left(nx\right)$$

حيث $i=\sqrt{-1}$

المثلثات:

نظرية. $-1\le\sin x\le 1$ لجميع قيم x الحقيقية.

نظرية. $\sin\left(-x\right)=-\sin\left(x\right)$ لجميع قيم x الحقيقية.

نظرية. $\cos\left(-x\right)=\cos\left(x\right)$ لجميع قيم x الحقيقية

نظرية. $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$، حيث $\cos x\ne 0$

نظرية. $\tan\left(x+y\right)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$، حيث $\tan x\tan y\ne 1$

نظرية. $\sin\left(x+y\right)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

نظرية. $\cos\left(x+y\right)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

نظرية. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

نظرية. $1+\tan^2 x=\sec^2 x$

نظرية. $1+\cot^2 x=\csc^2 x$

قانون جيوب التمام (Law of Cosines). في أي مثلث أطوال أضلاعه a، b، c، إذا كانت α هي الزاوية المقابلة للضلع a، β هي الزاوية المقابلة للضلع b، γ هي الزاوية المقابلة للضلع c، فإن:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\left(\alpha\right)$$

قانون الجيوب الموسع (Extended Law of Sines). في أي مثلث أطوال أضلاعه a ، b ، c ، إذا كانت α هي الزاوية المقابلة للضلع a ، β هي الزاوية المقابلة للضلع b ، γ هي الزاوية المقابلة للضلع c ، فإن:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}$$

أيضاً، إذا كان نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث يساوي R ، فإن:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}=2R$$

قانون الظلال (Tangent Law). في أي مثلث أطوال أضلاعه a ، b ، c ، إذا كانت α هي الزاوية المقابلة للضلع a ، β هي الزاوية المقابلة للضلع b ، γ هي الزاوية المقابلة للضلع c ، فإن:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\tan\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

نظرية الأعداد:

مبدأ الترتيب الحسن (Well – Ordering Principle). كل مجموعة غير خالية من الأعداد الصحيحة الموجبة لها عنصر أصغر (Least Element).

خوارزمية القسمة (Division Algorithm). إذا كان a ، b عددين صحيحين بحيث $b>0$ ، فإنه يوجد عددان صحيحان وحيدان q ، r بحيث:

$$a=qb+r \text{ ، } 0\le r<b$$

فرضية بيرتراند (Bertrand's Postulate). لأي عدد صحيح $k>1$ ، يوجد عدد أولي يقع بين k ، و $2k$.

نظرية ليجندر (**Legendre's Theorem**). إذا كانت p عدداً أوليًّا، فإن أس العدد p في التحليل الأولي (Prime Factoraization) لـ $n!$ هو: $e_p(n!) = \sum_{i \geq 1} floor\left[\frac{n}{p^i}\right]$. حيث إن الدالة $floor(x)$ تعطينا أكبر عدد صحيح لا يتجاوز x. مثلاً $floor(\pi) = 3$، و $floor(-\pi) = -4$.

صيغة أويلر-توتينت (**Euler's Totient Formula**). إذا كان التحليل الأولي للعدد الصحيح الموجب n: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\beta} \cdots p_m^{\mu}$، حيث p_1، p_2، ...، p_m أعداداً أولية، فإن عدد الأعداد الصحيحة بين 1، و n الأولية نسبيًّا بالنسبة لـ n تُعطى بالعلاقة: $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$.

نتيجة. إذا كانت $n = p^r$، حيث p عدد أولي، فإن $\varphi(n) = p^r - p^{r-1}$

قانون الاختصار العام للتطابق (**Generalized Cancelation Law for Congruence**). إذا كانت $ka \equiv kb \pmod n$، فإن $a \equiv b\left(\mod\left(\frac{n}{(k,n)}\right)\right)$، حيث (k,n) هو القاسم المشترك الأكبر للعددين n و k.

نظرية. إذا كانت k أصغر عدد صحيح موجب بحيث $a^k \equiv 1 \pmod n$، فإن k تقسم $\varphi(n)$، حيث $\varphi(n)$ هي دالة أويلر-توتينت (**Euler Totient Function**).

نظرية فيرمات الصغرى (**Fermat's Little Theorem**). إذا كانت p عدداً أوليًّا لا يقسم العدد الصحيح a، فإن $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

تعميم أويلر لنظرية فيرما (**Euler's Generalization of Fermat Theorem**). إذا كان a، m عددين صحيحين أوليين نسبيًّا (أي إن $(a,m)=1$)، حيث (a,m) هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a، m)، فإن $a^{\varphi(m)} = 1 \pmod m$، حيث $\varphi(n)$ هي دالة أويلر-توتينت (**Euler Totient Function**).

قاعدة التسعات (**Rule of "Casting out Nines"**). إذا كانت $s(n)$ هي مجموع أرقام التمثيل العشري (Decimal Representation) للعدد الصحيح n، فإن:

$$n \equiv s(n) \pmod 9$$

قابلية القسمة على 11 (**Divisibility by Eleven**). إذا كان $a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0$ هو النشر العشري للعدد الصحيح الموجب n، فإن:

$$n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^m a_m \pmod{11}$$

فمثلاً 275 تقبل القسمة على 11 لأن:

$$5 - 7 + 2 \equiv 0 \pmod{11}$$

مربعات (Squares):

- $n^2 \equiv 0 \pmod 4$، إذا كانت n عدداً زوجيًا.
- $n^2 \equiv 1 \pmod 4$، إذا كانت n عدداً فرديًا.
- $n^2 \equiv 0 \pmod 8$، إذا كانت $n \equiv 0 \pmod 4$.
- $n^2 \equiv 4 \pmod 8$، إذا كانت $n \equiv 2 \pmod 4$.
- $n^2 \equiv 1 \pmod 8$، إذا كانت n عدداً فرديًا.

تمهيدية (Lemma). إذا كان a ، b عددين أوليين نسبيًا (Coprime) (أي إن $(a,b) = 1$)، فإنه يوجد عدد صحيح x بحيث:

$$ax \equiv 1 \pmod b$$

نظرية ويلسون (Wilsons's Theorem). لأي عدد أولي p :

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$$

وعكس النظرية صحيح أيضاً.

البواقي التربيعية (Qudratic Residues). إذا كان العددان a و m أوليين نسبياً، فإن العدد a يسمى باقي تربيعي قياس m (Qudratic Residue modulo m)، إذا كان يوجد حل للتطابق $x^2 \equiv a \pmod m$. وخلاف ذلك يسمى العدد a باقي غير تربيعي قياس m (non-residue modulo m).

رمز ليجندر (Legendere Symbol). إذا كان p عدداً أوليًا (2 هو العدد الزوجي الأولي الوحيد) فإن رمز ليجندر $\left(\frac{a}{p}\right)$ يعرف كما يلي:

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases} 1 & \text{عندما } a \text{ باقي تربيعي قياس } p \\ -1 & \text{عندما } a \text{ باقي غير تربيعي قياس } p \\ 0 & \text{عندما } p \text{ تقسم } a \end{cases}$$

لاحظ أن $\left(\frac{a}{p}\right)$ هو مجرد رمز، ولا يعني " a مقسوماً على p "

قانون المقلوب التربيعي (Quadratic Reciprocity Law). إذا كان p ، q عددين أوليين فرديين مختلفين، فإن:

$$\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right)}$$

حيث $\left(\frac{p}{q}\right)$ هو رمز ليجندر.

نظرية الباقي الصينية (Chinese Remainder Theorem). إذا كانت $m_1, m_2, \ldots, m_k$ أعداداً صحيحة أولية نسبيًّا مثنى (Pairwise coprime integers) أكبر من 1، وإذا كانت $a_1, a_2, \ldots, a_k$ أعداداً صحيحة عشوائية، فإنه يوجد عدد صحيح x بحيث:

$$x \equiv a_j \pmod{m_j}$$

لجميع قيم $j=1,2,\ldots,k$.

نظرية. $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

نظرية. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

نظرية. $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$ (مجموع أول n من الأعداد الفردية يساوي n^2)

صيغة بينيت لأعداد فيبوناشي (Binet's Formula for Fibonacci Numbers) . متتالية فيبوناشي تبدأ بالحدين: 1 ، 1 ، ثم نضيف هذين الحدين لنحصل على 2 ، ثم نضيف الحدين الأخيرين لنحصل على 3 ، ثم نضيف الحدين الأخيرين لنحصل على 5 ، وهكذا:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\ldots$$

صيغة بينيت هي:

$$F(n)=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$$

حيث $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ، $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ، وكذلك $\beta=-\frac{1}{\alpha}$ وهما جذور المعادلة: $x^2-x-1=0$.

الصيغة الارتدادية لأعداد فيبوناشي (Recursive Formula for Fibonacci Numbers). تعرف أعداد فيبوناشي من خلال المعادلة الارتدادية التالية:

$$F(n)=F(n-1)+F(n-2)$$

حيث n عدد صحيح أكبر من 1 ، مع توفر الشرطان الابتدائيان (Initial Conditions): $F(0)=F(1)=1$.

الثلاثيات الفيثاغورية (Pythagorean Number Triples). جميع الثلاثيات الفيثاغورية البدائية (a,b,c) تعرف من خلال المعادلات الوسيطية: $a=2mn$ ، $b=m^2-n^2$ ، $c=m^2+n^2$ ، حيث m ، n أوليان نسبيًّا، ومختلفان في النوعية (زوجي، فردي)، ويحققان المتباينة $m>n$. $(3,4,5)$ هو أحد الأمثلة على الثلاثيات الفيثاغورية، لاحظ أيضاً أن هذه الأعداد تحقق نظرية فيثاغورث للمثلثات القائمة الزاوية: $3^2+4^2=5^2$.

دالة موبياس (Mobius Function) . $\mu(1)=1$ ، $\mu(n)=(-1)^k$ عندما تكون n حاصل ضرب k من الأعداد الأولية المختلفة، وغير ذلك تكون $\mu(n)=0$.

صيغة التعاكس لموبياس (Mobius Inversion Formula) . ليكن n عدداً صحيحاً موجباً، إذا كان $f(n)=\sum_{d|n} g(d)$ ، فإن $g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f(n/d)$.

نظرية. $\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}=\varphi(n)$.

نظرية. $\sum_{d|n}\mu(d)=0$ لجميع الأعداد الصحيحة $n\geq 2$.

معادلة ديوفنتية خطية (Linear Diophentine Equation): إذا كانت a ، و b ، و c أعداداً صحيحة موجبة، وكان g هو القاسم المشترك الأكبر للعددين، فإن المعادلة $ax+by=c$ لها حل في مجموعة الأعداد الصحيحة إذا وفقط إذا كانت g تقسم c .

أيضاً إذا كان (x_0, y_0) أحد الحلول الصحيحة للمعادلة $ax+by=c$ ، فإن المجموعة الكاملة للحلول تُعطى من خلال المجموعة:

$$\left\{(x_0+bt/g, y_0-at/g) \mid t \text{ is integer}\right\}$$

متطابقة المضروب (An Inequality for Factorials). إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإن:

$$n^{n/2}\leq n!\leq\frac{(n+1)^n}{2^n}$$

حيث $n!$ تشير إلى مضروب n. على سبيل المثال $5! = 5.4.3.2.1 = 120$.

التركيبات:

نظرية. عدد تراكيب n من الأشياء المختلفة مأخوذة k في كل مرة، بدون إرجاع يساوي:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

شرط التماثل لمعاملات ذات الحدين (Symmetry Condition for Binomial Coefficients).

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

نظرية. عدد تراكيب n من الأشياء المختلفة مأخوذة k في كل مرة، مع السماح بالإرجاع يساوي:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

متطابقة الامتصاص والاستخراج (Absorption / Extraction Identity). إذا كانت $k \neq 0$، فإن:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

متطابقة باسكال (Pascal's Identity). إذا كانت $k > 0$، فإن:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

متطابقة المجاميع المتوازية (Parallel Summation Identity) . إذا كانت $k \neq 0$، فإن:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

متطابقة مجموع الجداءات (Sums of Products Identity).

$$\binom{r}{0}\binom{s}{n} + \binom{r}{1}\binom{s}{n-1} + \binom{r}{2}\binom{s}{n-2} + \ldots + \binom{r}{n}\binom{s}{0} = \binom{r+s}{n}$$

متطابقة مراجعة ثلاثي الحدود (Trinomial Revision Identity) .

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

متطابقة النفي الأعلى (Upper Negation Identity). إذا كانت k عدداً صحيحاً، فإن:

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k}$$

متطابقة المجموع الأعلى (Upper Summation Identity).

$$\binom{0}{m}+\binom{1}{m}+\binom{2}{m}+...+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

نظرية ذات الحدين (Binomial Theorem).

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

نظرية ذات الحدين العامة لنيوتن (Newton's General Binomial Theorem). إذا كانت $|x|<1$، فإن:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{n}x^n=(1-x)^{-r}$$

مبدأ برج الحمام (Pigeonhole Principle). إذا وضعنا $(nk+1)$ من الحمام $(k\geq 1)$ في n برجاً، فإن برجاً واحداً على الأقل سيحتوي على $(k+1)$ من الحمام.

الأعداد المضلعة (Polygonal Numbers). العدد المضلع K ذو الترتيب n يُعطى من خلال العلاقة:

$$S_n^k=n+(k-2)\binom{n}{2}$$

من الأمثلة على الأعداد المضلعة الأعداد المثلثة، والأعداد المربعة، والأعداد الخماسية.

أعداد كاتالان (Catalan Numbers). تعرف أعداد كاتالان كما يلي:

$$C(n)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},\ n\geq 0$$

ومن ثَم فإن متتالية كاتالان هي المتتالية:

1, 1, 2, 5, 14, 42, ...

تمهيدية سبيرنر (Sperner's Lemma). افرض أن F هي عائلة كل المجموعات الجزئية للمجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ بحيث لا يوجد أي مجموعة جزئية في العائلة تحتوي على مجموعة جزئية أخرى. فإن حجم العائلة F محدود بـ:

$$|F| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

حيث $\lfloor n/2 \rfloor$ هي الأرضية لـ $n/2$

التوبولوجي والتحليل:

نظرية رول (Roll's Theorem). لتكن $f(x)$ دالة معرفة من الفترة المغلقة $[a,b]$ إلى مجموعة الأعداد الحقيقية: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$، ولتكن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b). إذا كانت $f(a)=f(b)$، فإنه يوجد عدد $c\in(a,b)$ بحيث $f'(c)=0$.

نظرية القيمة المتطرفة (القصوى) (Extreme Value Theorem). إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$، فإنه يوجد أعداد حقيقية c ، d في الفترة $[a,b]$ بحيث:

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

لجميع قيم x في الفترة $[a,b]$.

نظرية القيمة الوسطية (Intermediate Value Theorem). إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، وإذا كانت $f(a)<y<f(b)$ أو ($f(b)<y<f(a)$، فإنه يوجد عدد c ينتمي للفترة المفتوحة (a,b) بحيث $f(c)=y$.

نظرية القيمة الوسطى (Mean – Value Theorem). لتكن $f(x)$ دالة معرفة من الفترة المغلقة $[a,b]$ إلى مجموعة الأعداد الحقيقية: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$، ولتكن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b). إذا كانت $f(a)=f(b)$، فإنه يوجد عدد $c\in(a,b)$ بحيث:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

نظرية بولزانو (Bolzano's Theorem). لتكن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$. إذا كان $f(a)$، $f(b)$ متضادين (متعاكسين) في الإشارة، فإنه يوجد نقطة c تقع بين a و b بحيث $f(c)=0$.

اتصال كثيرات الحدود (Continuity of Polynomials). كثيرات الحدود متصلة دائماً، بينما الدوال النسبية $\frac{p(x)}{q(x)}$ تكون دائماً متصلة ما عدا عند النقاط التي تكون عندها $q(x)=0$.

الهندسة:

نظرية. مساحة المثلث الذي ارتفاعه h وطول قاعدته b تساوي:

$$A=\frac{1}{2}bh$$

نظرية. ليكن المثلث T فيه ضلعين طول أحدهما a وطول الآخر b. إذا كان قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين a و b يساوي γ، فإن مساحة المثلث T تساوي

$$A=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

صيغة هيرون (Heron's Formula). لتكن أطول أضلاع المثلث T هي: a، b، c. إذا كانت $s=\frac{a+b+c}{2}$ هي نصف محيط المثلث، فإن مساحة المثلث T تساوي:

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

نظرية. القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث توازي الضلع الثالث.

نظرية الرباعي الدائري (Cyclic Quadrilateral Theorem). يكون الشكل الرباعي دائريًّا، إذا وفقط إذا كان مجموع كل زاويتين متقابلتين يساوي 180°.

نظرية الزاوية المقابلة (Subtended Angle Theorem). الزاوية المركزية تساوي ضعف الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

نظرية نقاط الكرة (Spherical Points Theorem). إذا كان لدينا أربع نقاط لا تقع جميعها على مستوى واحد، فإنه يوجد كرة وحيدة تحوي النقاط الأربعة.

الملحق (C): التكتيكات الرياضية

يوجد العديد من التكتيكات الرياضية التي عادةً ما تستخدم في حل المسائل الرياضية، وفي القائمة المرجعية التالية تجد بعضاً من أشهر هذه التكتيكات.

١- **انظر إلى الحالات الصغيرة** (Look at Small Cases). قم ببعض الحسابات من خلال استخدام أرقام صغيرة، أو قيم صغيرة للمتغيرات، وذلك لكي تصبح على ألفة بالمسألة.

٢- **انظر إلى الحالات الخاصة والحالات المتطرفة** (Look at Special and Extreme Cases). افحص الحالات الخاصة، والمتطرفة، والقصوى، مثل: الصفر، والواحد، واللانهاية.

٣- **أجر الحسابات واحصل على البيانات** (Do Computations and Generate Data). أجر حسابات رقمية بحيث تحصل على كمية من البيانات تساعدك على اكتشاف نمط ما في هذه البيانات.

٤- **انظر إلى مسألة أسهل** (Look at Simpler Problem). إذا كانت المسألة المعطاة من الصعب حلها، حاول أن تحل حالة خاصة منها بحيث تكون أسهل وأبسط من المسألة الأصلية وتساعد على حلها.

٥- **انظر إلى مسألة مشابهة** (Look at a Related Problem). إذا وجدت صعوبة في حل المسألة التي أمامك، حاول أن تغيرها أو تعدلها إلى مسألة أبسط يمكن أن تحلها بسهولة، حيث إن حل مسألة مشابهة وأسهل يعطيك رؤية أفضل لحل المسألة الأصعب.

٦- **حل مسألة أكثر عمومية** (Solve a More General Problem). حاول حل مسألة أكثر عمومية تتضمن مسألتك كحالة خاصة.

٧- **فرق تسد** (Divide and Conquer). قسم المسألة التي أمامك إلى حالات منفصلة، ثم حل كل جزء على حدة.

٨- **ابحث عن التماثل** (Look for Symmetry). ابحث عن التماثل الذي يمكن أن تستفيد منه في المسألة. إذا كانت المسألة لا تتضمن تماثلات واضحة، حاول إيجاد التماثل من خلال إضافة ميزة أو تركيب مساعد.

٩- **ابحث عن اللامتغيرات** (Invariants). اللامتغير هو خاصية ما في المسألة لا تتغير. النوع (فردي أو زوجي) هو أحد الأنواع الشائعة للامتغيرات. إذا احتوت المسألة على أحد اللامتغيرات فاختر اللامتغير الذي يسهل حله.

١٠- **حل المسألة المزدوجة** (Solve the Dual Problem). بعض المسائل لها نسخ متناظرة، وفي بعض الحالات تكون النسخ المتناظرة متطابقة، فمثلاً تثبيت مساحة منحنى مغلق بسيط وتصغير محيطه، تكافئ المسألة المتعلقة بتثبيت المحيط وتعظيم المساحة.

١١- **حل المسألة المكملة** (Solve the Complementary Problem). بعض المسائل لها مسائل مكملة. في الاحتمالات مثلاً احتمال وقوع الحدث A يعبر عنه بـ $P(A)$ وهو يساوي $1-P(-A)$، حيث $P(-A)$ يعبر عن احتمالية عدم وقوع الحدث A .

١٢- **انظر إلى التكافؤ** (Consider Parity). ادرس الحالات الزوجية والفردية بشكل منفصل. هل التكافؤ محفوظ أم ثابت؟

١٣- **رتب الأشياء أو الأرقام** (Order the Object or Numbers). قم بفرز الأشياء أو الأرقام من خلال استخدام ترتيب منطقي، وافحص الحالات المتطرفة عند النقاط الطرفية (نقاط الانتهاء). هل أكبر أو أصغر عدد يمتلك خاصية معينة؟

١٤- **أعد ترتيب وتجميع الأشياء** (Rearrange the Objects or Group them in Pairs). حاول إعادة ترتيب الأشياء أو الأرقام أو حاول تجميعهم على شكل أزواج خاصة اعتماداً على خاصية معينة. هل تستطيع تجميع الأشياء أو الأرقام.

١٥- **انظر إلى المتناقضات المتعاكسة** (Consider Polar Opposites). خذ بعين الاعتبار المتناقضات المتعاكسة مثل الأعداد "الموجبة" و"السالبة". ماذا يحدث إذا كانت $x < 0$ ؟ ماذا يحدث إذا كانت $x > 0$ ؟

١٦- **انظر إلى المقلوب** (Consider Reciprocals). انظر إذا كنت تستطيع تعديل المسألة من خلال أخذ المقلوب لبعض المتغيرات أو المعلمات (parameters) في المسألة، فمثلاً مقلوب x هو $1/x$.

١٧- قم بتحليل كثيرات الحدود (Factor Polynomials) . حاول أن تحلل كثيرات الحدود.

١٨- غير الأساس للعدد (Change Number Bases). انظر ماذا يحدث إذا قمت بتغيير أساس العدد، على سبيل المثال انظر ماذا يحدث إذا نظرت للأعداد من خلال الأساس 2 (النظام الثنائي).

١٩- حلل الأعداد الصحيحة الموجبة إلى عواملها الأولية (Prime Factorize Positive Integers). حلل الأعداد الصحيحة الموجبة في المسألة إلى عواملها الأولية للكشف عن الأنماط المخفية المحتملة.

٢٠- استخدم المتباينات (Use Inequalities). مسائل الأمثلية عادةً يمكن حلها باستخدام المتباينات مثل متباينة الوسط الحسابي - الهندسي أو متباينة كوشي - شوارز. إذا لم تستطع إيجاد حل دقيق للمسألة، فالمتباينات يمكن أن تعطيك حدًّا أعلى أو أدنى لهذا الحل.

٢١- جد متوسط البيانات (Average the data) . إذا كانت البيانات أو الأرقام المنفردة مبعثرة وغير منظمة حاول أن تجد متوسط البيانات، فالمتوسط أحياناً يعطيك معلومات أفضل من البيانات الأصلية.

٢٢- ابحث عن أرقامك في مثلث باسكال (Look for Your Numbers in Pascal's Triangle). بالنسبة للمسائل المتعلقة بالتوافيق، ابحث عن أرقامك في مثلث باسكال، وهذا غالباً ما يقترح حلاً يتناول معاملات ذات الحدين.

٢٣- استخدم التحليل البعدي (Use Dimensional Analysis). أي حل فيزيائي صحيح لمسألة حياتية يجب أن يكون صحيح الأبعاد. التحليل البعدي دائماً ما يستطيع أن يزودنا بالشكل المناسب للحل.

٢٤- حول الدوال غير الخطية إلى دوال خطية (Linearize Nonlinear Functions) .بالنسبة للدوال غير الخطية، حاول الاستعانة بالتقريبات الخطية لها (مثلاً من خلال معادلة المماس أو تقريبات المستوى)

٢٥- تذكر المتطابقات الجبرية (Remember Algebraic Identities). من الممكن دائماً الاستعانة بالمتطابقات الجبرية لحل المسائل الرياضية الصعبة.

٢٦- استخدم اللوغاريتمات للتخلص من الأسس (Use Logarithms to Chop down Exponents). دائماً ما تستخدم اللوغاريتمات للتخلص من الأسس، كما يمكن استخدامها لإعادة كتابة الأعداد الكبيرة أو الصغيرة بطريقة أكثر سهولة، ويمكن استخدامها أيضاً لتحويل مسائل الضرب إلى مسائل جمع والعكس.

٢٧- حاول أن تستخدم التكرار والتعويض للخلف (Try Iteration and Back - Substitution).
أحياناً يمكن لك أن تحل معادلة من خلال استخدام التعويض للخلف، أو من خلال تخمين قيمة معينة والتعويض في المعادلة المعطاة بشكل متكرر.

٢٨- خذ أحد العناصر باعتباره "عنصراً خاصًا" (Consider One Object as a 'Special' Object).
العلاقات الارتدادية في التركيبات دائماً ما يمكن اشتقاقها من خلال اعتبار أحد العناصر في المجموعة "عنصراً خاصاً"، ثم قسم المسألة إلى حالتين مختلفتين: الحالة الأولى تحتوي على العنصر الخاص، فيما الحالة الثانية لا تحتويه.

٢٩- شكل نسب رقمية (Form Numerical Ratios). شكل نسبة للكميات التي تبقى ثابتة عندما تغير المسألة مقياسها.

٣٠- انظر إلى التشابه والتناسب (Look for Similarity and Proportionality). العديد من المسائل الهندسية يمكن حلها من خلال البحث عن المثلثات المتشابهة أو المتطابقة، وفيما يتعلق بالمسائل العددية حاول دائماً البحث عن الكميات المتناسبة.

٣١- استخدم العد المزدوج (Use Double Counting). عادةً ما يتم إثبات صحة المتطابقات التركيبية من خلال عد نفس المجموعة بطريقتين مختلفتين، وهذا ما يسمى بالعد المزدوج.

الملحق (D): توصيات للمزيد من القراءة

يوجد العديد من الكتب المميزة في حل المسائل الرياضية، في القائمة التالية تجد مجموعة من الكتب التي أقدّرها بشكل كبير. إذا كنت حديث العهد بفن حل المسائل الرياضية فإني أنصحك أن تبدأ بقراءة الكتاب الكلاسيكي لجورج بوليا (George Polya) (How to Solve It).

1. Barbeau, Kalmkin, and Moser, *500 Mathematical Challenge*, The Mathematical Association of America, Washington, D, C, 1995.
2. Fomin, D., Genkin, S., and Itenberg, I., *Mathematical Circles (Russian Experience)*, American mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.
3. Larson, L. C., *Problem – Solving Through Problems*, Springer Verlag, New York, N, Y., 1983.
4. Lozansky, E., and Rousseau, C., *Winning Solutions*, Springer Verlag, New York, N, Y., 1996.
5. Polya, G., *How to Solve it*, 2nd. Ed., Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
6. Polya, G., and Kilpatrick, J., *The Stanford Mathematics Problem Book*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2009.
7. Posmantier, A. S., and Lehman, I., *Mathematical Curiosities*, Prometheus Books, Amherst, New York, 2014.
8. Trigg C. W., *Mathematical Quickies*, Dover Puplications, Inc., New York, N. Y., 1985.
9. Zeits, P., *The Art and Craft of Problem Solving*, John Wiley & Sons, New York, N. Y., 1999.

مصادر المسائل

المسائل الواردة في هذا الكتاب تشكل مجموعتي الخاصة، لقد قمت بتجميع المسائل الرياضية الجيدة من العديد من المصادر وذلك خلال عدة عقود. القائمة التالية تحدد مصادر هذه المسائل وفقاً لما توفر لدي من معلومات.

المسألة 1. نشرت على الموقع {www.brilliant.org}

المسألة 2. الفضول الرياضي، مسألة رقم ٨٤.

المسألة 3. نشرت على الموقع {www.brilliant.org}

المسألة 4. الفضول الرياضي، مسألة رقم ٣٠.

المسألة 5. مجلة الكم، يوليو ١٩٩٥.

المسألة 6. نشرت على الموقع {www.brilliant.org}

المسألة 7. مسألة الأسبوع في جامعة بيريود.

المسألة 8. نشرت على الموقع {www.brilliant.org}

المسألة 9. نشرت على الموقع {www.brilliant.org}

المسألة 10. المصدر غير معروف

المسألة 11. نشرت على الموقع {www.brilliant.org}

المسألة 12. أولمبياد حل المسائل الرياضية في جامعة ستانفورد، صيف ٢٠٠٨

المسألة 13. المصدر غير معروف

المسألة 14. نشرت على الموقع {www.brilliant.org}

المسألة 15. نشرت على الموقع {www.brilliant.org}

المسألة 16. المصدر غير معروف (التراث الرياضي)

المسألة 17. نشرت على الموقع (www.brilliant.org)

المسألة 18. المصدر غير معروف

المسألة 19. نشرت على الموقع (www.brilliant.org)

المسألة 20. نشرت على الموقع (www.brilliant.org)

المسألة 21. المصدر غير معروف

المسألة 22. ٥٠٠ تحدي رياضي، المسألة رقم ٤٨.

المسألة 23. الأولمبياد الرياضي الهندي (التاريخ غير معروف).

المسألة 24. نشرت على الموقع (www.brilliant.org)

المسألة 25. أولمبياد حل المسائل الرياضية في جامعة ستانفورد، صيف ٢٠٠٨

المسألة 26. نشرت على الموقع (www.brilliant.org)

المسألة 27. أولمبياد حل المسائل الرياضية في جامعة ستانفورد، صيف ٢٠٠٨

المسألة 28. المصدر غير معروف

المسألة 29. المصدر غير معروف

المسألة 30. السرعة الرياضية (Mathematical Quickies)، المسألة رقم ٢٦٣.

المسألة 31. كتاب حل المسائل، جامعة ستانفورد، ٢٠٠٩

المسألة 32. أولمبياد حل المسائل الرياضية في جامعة ستانفورد، صيف ٢٠٠٨

المسألة 33. الفن والدهاء في حل المسألة، ص: ٦.

المسألة 34. المصدر غير معروف

المسألة 35. الجمعية الرياضية الكندية.

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي – إنجليزي

أ

اتساق داخلي	Internal consistency
اتصال كثيرات الحدود	Continuity of polynomials
احتمال	Probability
احتمال مستقل	Independent probability
اختبار الجذر النسبي	Rational root test
اختبار عددي	Numerical testing
ارتدادية	Recurrence
استقراء	Induction
استقراء رياضي	Mathematical induction
افتراضات	Assumptions
اكتشاف	Discovery
الأساس ٣	Base three
إبداع	Creativity
إثبات التخمينات	Prove conjectures
إعادة ترتيب	rearrangement
إنشاء	Construction
إنشاء مساعد (إضافي)	Auxiliary construction
أثبت	Prove

أثبت	Verify
أساس الاستقراء	Induction basis
أسس	Exponents
أسس (قوى)	Powers
أسس زوجية	Even powers
أسس فردية	Odd powers
أسي	Exponential
أعداد أولية	Prime numbers
أعداد ثنائية	Binary numbers
أعداد فردية	Odd numbers
أعداد فيبوناشي	Fibonacci Numbers
أعداد كاتلان	Catalan numbers
أقل مسافة كلية	Minimum total distance
أمثلية	Optima
أنماط	Patterns
أنماط خاطئة	False patterns
أوجد	Find
أولمبياد	Olympiad
أوليان نسبياً	Coprime
آلة حاسبة	Calculator

ب

برهان الوحدانية	Proof of uniqueness
البرهان باستخدام المثال المناقض	Proof by counterexample
البرهان باستخدام المكافئ العكسي	Proof by contrapositive
البرهان بالتناقض	Proof by contradiction
البرهان غير مباشر	Reductio ad absurdum
البرهان مباشر	Direct proof
البرهان من خلال الإنشاء	Proof by construction

ت

تحليل	Analysis
تحليل إلى العوامل الأولية	Prime factorize
تحليل إلى عوامل	Factorization
تحويل	Transformation
تخمين	Conjecture
ترتيب	Order
ترتيب صفي رباعي	Ordered 4-tuples
تركيب	Combination
تركيبات	Combinatorics
تسعات	Casting out nine
تطابق	Congruence
تعميم أويلر	Euler's generalization
تقدير	Estimating
تقريب	Approximating
تكتيكات	Tactics
تكتيكات رياضية	Mathematical tactics
تمهيدية سبيرنر	Spemer's lemma
تناقض	Contradiction
تنصيف	Bisection
تنصيف الزاوية	Angle Bisection
توبولوجي	Topology
توصيات للمزيد من القراءة	Recommended reading

ث

ثلاثيات فيثاغورية	Pythagorean triple
ثوابت	Constants
ثوابت رياضية	Mathematical constants

ج

جبر خطي	Linear algebra
جذر	Canal
جذور	Roots
جذور الوحدة	Roots of unity
جذور سالبة	Negative roots
جواب	Answer
جورج بوليا	George polya

ح

حاصل ضرب زوجي	Even product
حالات خاصة	Special cases
حالات صغيرة	Small cases
حالات متطرفة	Extreme cases
حذف	Cancellation
حساب المثلثات	Trigonometry
الحساب المقياسي	Modular arithmetic
حكاية	Tale
حكاية الاكتشاف الرياضي	Tale of discovery
حل	Solution
حل المسألة	Problem solving

خ

خاتمة	Epilogue
خبير	Expert
خدعة المزاوجة	Pairing trick
خرافات	Myths
خرافات رياضية	Mathematical myths
خطأ	Error
خوارزمية القسمة	Division algorithm

د

Absolute value function	دالة القيمة المطلقة
Periodic function	دالة دورية
Convex function	دالة محدبة
Mobius function	دالة موبياس
Period	دورة
Periodic	دوري

ر

Quadratic residues	راسب تربيعي
Draw picture	رسم شكل
Legendre's symbol	رمز ليجندر
Coin flipping	رمي قطعة نقد

ز

Angle	زاوية
Complementary angels	زوايا متتامة
Congruent angels	زوايا متطابقة
Zeus	زيوس

س

Negative	سالب
Psychology	سيكولوجية

ش

Symmetry condition	شرط التماثل
Trail	شعار

ص

Zero	صفر
Picture	صورة
Formulate conjectures	صياغة التخمينات
Mobius inversion formula	صيغة التعاكس لموبياس

صيغة بينيت	Binet's formula
صيغة تربيعية	Quadratic formula
صيغة هيرون	Heron's formula

ض

ضربي	Multiplicative
ضوارب لاجرانج	Lagrange Multipliers

ط

طريقة متداخلة	Telescoping method

ظ

ظلال	Tangents

ع

عادل	Fair
عامل	Factor
عبقري	Genius
عدد أويلر	Euler's number
عدد تخيلي	Imaginary number
عدد صحيح	Integer
عشوائي (اختياري)	Arbitrary
علاقة	Relationship
علاقة ارتدادية	Recursive relation
عمل للخلف	Working backward
عملية	Process
عملية النهاية	Limiting

ف

فرضية بيرتراند	Bertrand's postulate
فرق تسد	Divide-and-conquer
فشل	Failure
فكر وتعلم	Reflect and learn

فن	Art
فن	Fine art
فيثاغورية	Pythagorean

ق

قابل للقسمة	Divisible
قابلية القسمة على ١١	Divisibility be eleven
قاعدة	Inverse rule
قاعدة الأس	Exponent rule
قاعدة التطابق	Identity rule
قاعدة الجمع	Addition Rule
قاعدة الحذف	Cancellation Law
قاعدة السلسلة	Chain rule
قاعدة الطرح	Subtraction rule
قاعدة المقلوب	Reciprocal rule
قاعدة ديكارت للإشارات	Descartes' rule od signs
قانون الجيوب	Law of sines
قانون الظلال	Law of tangents
قانون المقلوب التربيعي	Quadratic reciprocity law
قانون جيوب التمام	Law of cosines
قائمة	List
القسمة على صفر	Divide-by-zero
قناة الجذر	Root canal
قواسم	Divisors
القوة الخامسة	Fifth power
قوى العدد ٢	Power of two
قوى العدد ٣	Powers of three
أصغر قيمة	Least value
قيمة صغرى	Minimum

قيمة مطلقة	Absolute value

ك

كثيرة حدود	Polynomial
كثيرة حدود	Polynomial
كثيرة حدود واحدية	Monic polynomial
كسور جزئية	Partial fractions

ل

لمع الحجر	Polish the stone
لوغاريتم	Logarithm
ليونهارد أويلر	Leonard Euler

م

مبدا برج الحمام	Pigeonhole principle
مبدأ الترتيب الحسن	Well ordering principle
مبدأ صندوق درشليه	Dirichlet box principle
متباينة	Inequality
متباينة	Inequality
متباينة المثلث	Triangle inequality
متباينة بيرنولي	Bernoulli's Inequality
متباينة كوشي شوارز	Cauchy- Schwarz inequality
متباينة هايجين	Huygen's inequality
متباينة ينسين	Jensen's inequality
متتالي	Consecutive
متتالية	Sequence
متطابقة الامتصاص والاستخراج	Absorption / extraction identity
متطابقة المجاميع المتوازية	Parallel summations identity
متطابقة المجموع الأعلى	Upper summation identity
متطابقة النفي الأعلى	Upper negation identity
متطابقة باسكال	Pascal's identity

Trigonometric identity	متطابقة مثلثية
Sum of product identity	متطابقة مجموع الجداءات
Trinomial revision identity	متطابقة مراجعة ثلاثي الحدود
Slack variables	متغيرات راكدة
Symmetric	متماثل
Averaging	متوسط
Persistent	مثابر
Counter example	مثال مناقض
Pascal's triangle	مثلث باسكال
Partial sums	مجاميع جزئية
Equal sums	مجاميع متساوية
Radicand	مجذور
Sum of roots	مجموع الجذور
Classic sum	مجموع كلاسيكي
Telescoping sum	مجموع متداخل
Multinomial sum	مجموع متعددة الحدود
Constraints	محددات
Range	مدى
Conjugate	مرافق
Square	مربع
Perfect square	مربع كامل
Flexible	مرن
Pairing	مزاوجة
Distance	مسافة
Problem	مسألة
General problem	مسألة عامة
Independent	مستقل
Problem solving dictums	مسلمات حل المسألة

Sources	مصادر
Problem sources	مصادر المسائل
Matrices	مصفوفات
Matrix	مصفوفة
Factorials	مضروب
Angle chasing	مطاردة الزاوية
Quadratic equations	معادلات تربيعية
Linear equations	معادلات خطية
Simultaneous linear equations	معادلات خطية آنية
Rational equations	معادلات نسبية
Exponential equation	معادلة أسية
Functional equation	معادلة داليّة
Diophantine equation	معادلة ديوفنتية
Linear Diophantine equations	معادلة ديوفنتية خطية
Logarithm equation	معادلة لوغاريتمية
Coefficients	معاملات
Binomial coefficients	معاملات ذات الحدين
IQ	معدل الذكاء
Meta Knowledge	معرفة فوقية
Multiplicative inverse	معكوس ضربي
Reciprocal	مقلوب
Contrapositive	مكافئ عكسي
Cube	مكعب
Practice	ممارسة
Logic	منطق
Hausdroff manifold	منطو هاوسدورف
Mental perspective	منظور ذهني
Positive	موجب

ن

نجاح	Success
نصف دائرة	Semi-circle
نظريات مفيدة	Useful theorems
نظرية	Theorem
النظرية الأساسية في الجبر	Fundamental theorem of algebra
نظرية الأعداد	Number theory
نظرية الباقي	Polynomial remainder theorem
نظرية الباقي الصينية	Chinese remainder theorem
نظرية التطابق	Identity theorem
نظرية الزاوية المقابلة	Subtended angle theorem
نظرية العوامل	Factor theorem
نظرية القيمة القصوى	Extreme value theorem
نظرية القيمة الوسطى	Mean value theorem
نظرية القيمة الوسطية	Intermediate value theorem
نظرية المثلث المتساوي الأضلاع الدوري	Cyclic quadrilateral theorem
نظرية بلزانو	Bolzano's theorem
نظرية دي موافر	De Moivre's theorem
نظرية ذات الحدين	Binomial Theorem
نظرية ذات الحدين العامة لنيوتن	Newton's general binomial
نظرية رول	Rolle's theorem
نظرية عوامل كثيرة الحدود،	Polynomial factor theorem
نظرية فيثاغورث	Pythagorean theorem
نظرية فيرما الصغرى	Fermat little theorem
نظرية ليجندر	Legendre's theorem
نظرية متعددة الحدود	Multinomial theorem
نظرية نقاط الكرة	Spherical points theorem
نظرية ويلسون	Wilson's theorem

نهاية	Limit
نوعية	Parity

هـ

هجود غاشم	Brute-force-dumb

و

وجود	Existence
وحدانية	Uniqueness
وسط توافقي	Harmonic mean
وسط حسابي	Athematic mean
وسط حسابي هندسي	Arithmetic – geometric mean
وسط هندسي	Geometric mean

ثانياً: إنجليزي - عربي

A

Absolute value	قيمة مطلقة
Absolute value function	دالة القيمة المطلقة
Absorption / extraction identity	متطابقة الامتصاص والاستخراج
Addition Rule	قاعدة الجمع
Analysis	تحليل
Angle	زاوية
Angle Bisection	تنصيف الزاوية
Angle chasing	مطاردة الزاوية
Answer	جواب
Approximating	تقريب
Arbitrary	عشوائي (اختياري)
Arithmetic mean inequality	متباينة الوسط الحسابي
Arithmetic – geometric mean	وسط حسابي هندسي
Art	فن
Assumptions	افتراضات
Arthematic mean	وسط حسابي
Auxiliary construction	إنشاء مساعد (إضافي)
Averaging	متوسط

B

Backward	عكسي
Base three	الأساس ٣
Bernoulli's Inequality	متباينة بيرنولي
Bertrand's postulate	فرضية بيرتراند

Binary numbers	أعداد ثنائية
Binet's formula	صيغة بينيت
Binomial coefficients	معاملات ذات الحدين
Binomial Theorem	نظرية ذات الحدين
Bisection	تنصيف
Bolzano's theorem	نظرية بلزانو
Brilliant	بريلينت
Brute-force-dumb	هجود غاشم
Build	بناء

C

Calculator	آلة حاسبة
Canal	جذر
Cancellation	حذف
Cancellation Law	قاعدة الحذف
Casting out nine	تسعات
Catalan numbers	أعداد كاتلان
Cauchy- Schwarz inequality	متباينة كوشي شوارز
Chain rule	قاعدة السلسلة
Chinese remainder theorem	نظرية الباقي الصينية
Classic sum	مجموع كلاسيكي
Coefficients	معاملات
Coin flipping	رمي قطعة نقد
Combination	تركيب
Combinatorics	تركيبات
Complementary angels	زوايا متتامة

Complex number	عدد مركب
Congruence	تطابق
Congruent angels	زوايا متطابقة
Conjecture	تخمين
Conjugate	مرافق
Consecutive	متتالي
Constants	ثوابت
Constraints	محددات
Construction	إنشاء
Continuity of polynomials	اتصال كثيرات الحدود
Contradiction	تناقض
Contrapositive	مكافئ عكسي
Convex function	دالة محدبة
Coprime	أوليان نسبياً
Counter example	مثال مناقض
Creativity	إبداع
Cube	مكعب
Cyclic quadrilateral theorem	نظرية المثلث المتساوي الأضلاع الدوري

D

De Moivre's theorem	نظرية دي موافر
Descartes' rule od signs	قاعدة ديكارت للإشارات
Diophantine equation	معادلة ديوفنتية
Direct proof	برهان مباشر
Dirichlet box principle	مبدأ صندوق درشليه
Discovery	اكتشاف

Distance	مسافة
Divide-and-conquer	فرق تسد
Divide-by-zero	القسمة على صفر
Divisibility be eleven	قابلية القسمة على ١١
Divisible	قابل للقسمة
Division algorithm	خوارزمية القسمة
Divisors	قواسم
Draw picture	رسم شكل

E

Epilogue	خاتمة
Equal sums	مجاميع متساوية
Error	خطأ
Estimating	تقدير
Euler's generalization	تعميم أويلر
Euler's number	عدد أويلر
Even powers	أسس زوجية
Even product	حاصل ضرب زوجي
Existence	وجود
Expert	خبير
Exponent rule	قاعدة الأس
Exponential	أسي
Exponential equation	معادلة أسية
Exponents	أسس
Extreme cases	حالات متطرفة
Extreme value theorem	نظرية القيمة القصوى

F

Factor	عامل
Factor theorem	نظرية العوامل
Factorials	مضروب
Factorization	تحليل إلى عوامل
Failure	فشل
Fair	عادل
False patterns	أنماط خاطئة
Fermat little theorem	نظرية فيرما الصغرى
Fibonacci Numbers	أعداد فيبوناشي
Fifth power	قوة خامسة
Find	أوجد
Fine art	فن
Flexible	مرن
Formulate conjectures	صياغة التخمينات
Functional equation	معادلة داليَّة
Fundamental theorem of algebra	النظرية الأساسية في الجبر

G

General problem	مسألة عامة
Genius	عبقري
Geometric mean	وسط هندسي
George polya	جورج بوليا

H

Harmonic mean	وسط توافقي
Hausdroff manifold	منطو هاوسدورف
Heron's formula	صيغة هيرون

Huygen's inequality	متباينة هايجين

I

Identity rule	قاعدة التطابق
Identity theorem	نظرية التطابق
Imaginary number	عدد تخيلي
Independent	مستقل
Independent probability	احتمال مستقل
Induction	استقراء
Induction basis	أساس الاستقراء
Inequality	متباينة
Inequalities	متباينات
Integer	عدد صحيح
Intermediate value theorem	نظرية القيمة الوسطية
Internal consistency	اتساق داخلي
Inverse rule	قاعدة
IQ	معدل الذكاء

J

Jensen's inequality	متباينة ينسين

K

K-gonal number	رقم الجوجنلي

L

Lagrange Multipliers	ضوارب لاجرانج
Law of cosines	قانون جيوب التمام
Law of sines	قانون الجيوب
Law of tangents	قانون الظلال
Least value	أصغر قيمة

Legendre's symbol	رمز ليجندر
Legendre's theorem	نظرية ليجندر
Leonard Euler	ليونهارد أويلر
Limit	نهاية
Limiting	عملية النهاية
Linear algebra	جبر خطي
Linear Diophantine equations	معادلة ديوفنتية خطية
Linear equations	معادلات خطية
List	قائمة
Logarithm	لوغاريتم
Logarithm equation	معادلة لوغاريتمية
Logic	منطق

M

Mathematical constants	ثوابت رياضية
Mathematical induction	استقراء رياضي
Mathematical myths	خرافات رياضية
Mathematical tactics	تكتيكات رياضية
Matrices	مصفوفات
Matrix	مصفوفة
Mean value theorem	نظرية القيمة الوسطى
Mental perspective	منظور ذهني
Meta Knowledge	ما وراء المعرفة
Minimum	قيمة صغرى
Minimum total distance	أقل مسافة كلية
Mobius function	دالة موبياس

Mobius inversion formula	صيغة التعاكس لموبياس
Modular arithmetic	حساب مقياسي
Monic polynomial	كثيرة حدود واحدية
Multinomial sum	مجموع متعددة الحدود
Multinomial theorem	نظرية متعددة الحدود
Multiplicative	ضربي
Multiplicative inverse	معكوس ضربي
Myths	خرافات

N

Negative	سالب
Negative roots	جذور سالبة
Newton's general binomial	نظرية ذات الحدين العامة لنيوتن
Number theory	نظرية الأعداد
Numerical testing	اختبار عددي

O

Odd numbers	أعداد فردية
Odd powers	أسس فردية
Olympiad	أولمبياد
Optima	أمثلية
Order	ترتيب
Ordered 4-tuples	ترتيب صفي رباعي

P

Pairing	مزاوجة
Pairing trick	خدعة المزاوجة
Parallel summations identity	متطابقة المجاميع المتوازية
Parity	نوعية

Partial fractions	كسور جزئية
Partial sums	مجاميع جزئية
Pascal's identity	متطابقة باسكال
Pascal's triangle	مثلث باسكال
Patterns	أنماط
Perfect square	مربع كامل
Period	دورة
Periodic	دوري
Periodic function	دالة دورية
Persistent	مثابر
Picture	صورة
Pigeonhole principle	مبدأ برج الحمام
Polish the stone	لمع الحجر
Polynomial	كثيرة حدود
Polynomial factor theorem	نظرية عوامل كثيرة الحدود،
Polynomial remainder theorem	نظرية الباقي
Positive	موجب
Power of two	قوى العدد ٢
Powers	أسس (قوى)
Powers of three	قوى العدد ٣
Practice	ممارسة
Prime factorize	تحليل إلى العوامل الأولية
Prime numbers	أعداد أولية
Probability	احتمال

Problem	مسألة
Problem solving	حل المسألة
Problem solving dictums	مسلمات حل المسألة
Problem sources	مصادر المسائل
Process	عملية
Proof by construction	البرهان من خلال الإنشاء
Proof by contradiction	البرهان بالتناقض
Proof by contrapositive	البرهان باستخدام المكافئ العكسي
Proof by counterexample	البرهان باستخدام المثال المناقض
Proof of uniqueness	برهان الوحدانية
Prove	أثبت
Prove conjectures	إثبات التخمينات
Psychology	سيكولوجية
Pythagorean	فيثاغورية
Pythagorean theorem	نظرية فيثاغورث
Pythagorean triple	ثلاثيات فيثاغورية

Q

Quadratic equations	معادلات تربيعية
Quadratic formula	صيغة تربيعية
Quadratic reciprocity law	قانون المقلوب التربيعي
Quadratic residues	راسب تربيعي

R

Radicand	مجذور
Range	مدى
Rational equations	معادلات نسبية

Rational root test	اختبار الجذر النسبي
rearrangement	إعادة ترتيب
Reciprocal	مقلوب
Reciprocal rule	قاعدة المقلوب
Recommended reading	توصيات للمزيد من القراءة
Recurrence	ارتدادية
Recursive relation	علاقة ارتدادية
Reductio ad absurdum	برهان غير مباشر
Reflect and learn	فكر وتعلم
Relationship	علاقة
Rolle's theorem	نظرية رول
Root canal	قناة الجذر
Roots	جذور
Roots of unity	جذور الوحدة

S

Semi-circle	نصف دائرة
Sequence	متتالية
Simultaneous linear equations	معادلات خطية آنية
Slack variables	متغيرات راكدة
Small cases	حالات صغيرة
Solution	حل
Sources	مصادر
Special cases	حالات خاصة
Sperner's lemma	تمهيدية سبيرنر
Spherical points theorem	نظرية نقاط الكرة

Square	مربع
Subtended angle theorem	نظرية الزاوية المقابلة
Subtraction rule	قاعدة الطرح
Success	نجاح
Sum of product identity	متطابقة مجموع الجداءات
Sum of roots	مجموع الجذور
Symmetric	متماثل
Symmetry condition	شرط التماثل

T

Tactics	تكتيكات
Tale	حكاية
Tale of discovery	حكاية الاكتشاف الرياضي
Tangents	ظلال
Telescoping method	طريقة متداخلة
Telescoping sum	مجموع متداخل
Thales' theorem	نظرية ثالي
Theorem	نظرية
Topology	توبولوجي
Trail	شعار
Transformation	تحويل
Triangle inequality	متباينة المثلث
Trigonometric identity	متطابقة مثلثية
Trigonometry	حساب المثلثات
Trinomial revision identity	متطابقة مراجعة ثلاثي الحدود

U

Uniqueness	وحدانية
Upper negation identity	متطابقة النفي الأعلى
Upper summation identity	متطابقة المجموع الأعلى
Useful theorems	نظريات مفيدة

V

Verify	أثبت

W

Well ordering principle	مبدأ الترتيب الحسن
Wilson's theorem	نظرية ويلسون
Working backward	عمل للخلف

Z

Zero	صفر

كشاف الموضوعات

أ

الاتساق الداخلي، ٤٠

احتمال، ١٢١، ٧٣، ٧٤

أحجار الدومينو، ٣٦، ٣٧

احصل على الجواب، ١٩

الاختبار العددي، ٣٩

اختبارات الذكاء، ٨

أساس الاستقراء، ٣٧

الاستقراء، ١٠٦، ١٢٩، ١٦٣، ٣٦

استكشف المسألة، ١٧، ١٩، ٤

أسس زوجية، ١١٥

أسس، ١١٥، ١٦٥، ٨٠

أعداد أولية، ٢٤، ٨٠، ٩١

أعداد ثنائية، ٧٠، ٧١

أعداد فردية، ١٦٠، ٢٨، ٣٥

أعداد، ١٠٣، ١٠٤، ١٦٠، ١٦٧، ١٦٨، ١٦٩، ١٧٢، ٢٠، ٢١، ٢٣، ٢٤، ٢٨، ٣٥، ٤٠، ٤٤، ٥٧، ٦٣، ٦٩، ٧٠، ٧١، ٧٣، ٨٠، ٨٦، ٩١، ٩٢، ٩٣، ٩٤، ٩٥

اعكس فشلك إلى نجاح، ١١

الأفكار المفتاحية، ٤٥، ٤٦

الاقتضاء، ٣١

اقرأ نص المسألة ثلاث مرات، ١٤

إنشاء، ١٥٠، ١٥١

أنماط، ١٢٨، ٢٦، ٥٠

ب

البحث عن الأنماط، ٢١، ٢٥

البرهان المباشر، ٣٢

برهان الوحدانية، ٣٤

البرهان باستخدام المثال المناقض، ٣٥

البرهان بالتناقض، ١٢٤، ٣٢، ٣٣، ٩٣

البرهان بالمكافئ، ٣٣

البرهان، ١٢٤، ٣٢، ٣٣، ٣٤، ٣٥، ٣٦، ٦٢، ٩٣

ت

تحقق من جوابك، ٣٩

تحقق من حلك، ٣٩، ٤

تحقق، ١٠٦، ١٣٥، ١٣٥، ١٣٦، ١٤١، ١٥،
١٦٧، ١٦٨، ١٦٩، ١٧١، ١٩، ٣٩، ٤،
٦١، ٦٩، ٩٢

تحليل، ١٤٢، ١٥، ٣٧، ٦٣، ٧٩، ٨٢

تخمين، ١٠٤، ١١٨، ١٢٩، ٢٨، ٣١، ٣٥

ترتيب، ١٢٨، ١٤٢، ١٥٩، ١٦٠، ٥٨، ٧٧

تركيب، ١٦٧، ١٦٨

تركيبات، ٢٥

تطابق، ١٥٠، ٩٥

تفكير، ١٢٨، ٤، ٧، ٨، ٨٣

تكتيكات، ٣٧

التمارين الروتينية، ١٠

التمارين، ٤، ٧، ١٠

تناقض، ١٢٥، ١٣٤، ١٣٦، ٣٣، ٣٤، ٦٢،
٦٣، ٩٣

تنصيف الزاوية، ١٥١

تنصيف، ١٥١

ج

جذر تربيعي، ١٦

جذر، ١٦، ٥٠، ٦٢، ٦٣

جذور حقيقية، ٤٩، ٦١، ٦٢

جذور سالبة، ٦١، ٦٢، ٦٣

جذور كثيرة الحدود، ١٣، ٦١، ٦٢

جذور مختلفة، ٤٩، ٥٠، ٥١

جذور مركبة، ٦١

جذور، ١٣، ١٣٢، ٤٩، ٥٠، ٥١، ٦١، ٦٢،
٦٣

جمل الوجود، ٣١

جملة، ٢٧، ٢٨، ٢٩، ٣٢، ٣٣، ٣٤، ٣٦، ٣٩

جواب، ١١٦، ١٥٧، ١٦٨، ١٦٩، ١٩، ٥٤

جورج بوليا، ١٥، ٢٢

ح

حالات، ١٢٠، ١٣٥، ١٧، ٣٩

حساب التفاضل والتكامل، ١٠٣، ١٠٦،
٨٤، ٩٨

حساب المثلثات، ١٥٥

الحساب المقياسي، ١٦٤، ٩٤، ٩٥، ٩٦

حساب، ١٠٣، ١٠٦، ١٢٧، ١٥٥، ٥٧،
٦٢، ٨٤، ٩٨

حل المسألة، ١١٦، ١١٨، ١٢٠، ١٢٧،
١٢٨، ١٣، ١٦، ١٧، ١٤٦، ١٥٦،
١٦٤، ١٨، ١٩، ٢٢، ٢٣، ٣، ٤، ٥،
٣١، ٣٨، ٣٩، ٤٥، ٥٣، ٦٧، ٧، ٩،
١٠، ٨٥

حليل الأولي، ٤٠

حوّل الفشل إلى نجاح، ١١

خ

خبير في حل المسألة، ٨
الخطوات الأساسية لحل المسائل الرياضية، ٣

د

دالة القيمة المطلقة، ١٤١، ٤١
دالة حقيقية، ٤٩، ٦٥
دالة دورية، ٦٥، ٦٧
دالة، ١٠٣، ١٠٧، ١٣١، ١٣٥، ١٣٦، ١٤١، ١٥٣، ١٦، ١٧، ١٨، ٤١، ٤٣، ٤٩، ٦٥، ٦٧
الدرجة الخامسة، ٤٩
الدرجة الرابعة، ١٦٤، ٥٧، ٥٨
الدرجة، ١١٦، ١٦٤، ٤٩، ٥٧، ٥٨، ٦١
دورة، ٦٥، ٦٧

ر

الرجال فقط هم الجيدون في الرياضيات، ٩
الرجوع للخلف، ٢٢، ٧٤
رموز خاصة، ٧
الرياضيات فن، ١٠
الرياضيات ليست أكثر من مجرد منطق، ٩

ز

زاوية، ١٤٩، ١٥٢، ١٨، ٢٢، ٥٤

س

سيكولوجية حل المسألة، ٣، ٧

ص

صياغة التخمينات، ٢٧
الصيغة التربيعية، ١٣٢، ١٧٣
صيغة، ١٢٠، ١٣٥، ١٥٣، ١٥٤، ١٧، ٤

ض

ضوارب لاجرانج، ١٠٦، ٩٨

ط

طريقة التناقص اللانهائية لفيرما، ٣٢

ظ

ظل الزاوية، ٥٥
الظل، ٥٣، ٥٤
الظلال، ٥٣، ٥٤

ع

عدد أولي، ٢٦، ٣٣، ٩٤
عدد أويلر، ٨٥
عدد تخيلي، ١٤٧، ٨٧
عدد حقيقي، ١٠٥، ١٧١، ٤٠، ٥٠، ٦٥، ٧٥، ٨٧
عدد زوجي، ١٦٠، ١٦١، ٣٣، ٣٥
عدد صحيح، ١٠٤، ١٢٨، ٢٥، ٢٨، ٣٣، ٣٦، ٤٦، ٦٦، ٦٩، ٧٩، ٨٣، ٩١، ٩٢، ٩٤، ٩٥

عدد غير نسبي، ٣٢، ٨٥
عدد فردي، ١٢٩، ١٦٠، ١٦١، ٤٣
عدد نسبي، ٣٤
عدد، ١٠٤، ١٠٥، ١٠٦، ١٠٦، ١١٩،
١٢٠، ١٢١، ١٢٢، ١٢٤، ١٢٧، ١٢٨،
١٢٩، ١٣٩، ١٤٧، ١٥، ١٦٠، ١٦١،
١٦٧، ١٦٨، ١٦٩، ١٧١، ٢١، ٢٤،
٢٥، ٢٦، ٢٨، ٣، ٣٢، ٣٣، ٣٤، ٣٥،
٣٦، ٣٨، ٣٩، ٤٠، ٤٣، ٤٥، ٤٦، ٥٠،
٥٨، ٦٢، ٦٣، ٦٥، ٦٩، ٧٤، ٧٥، ٧٩،
٨٠، ٨٢، ٨٣، ٨٣، ٨٥، ٨٧، ٩١، ٩٢،
٩٤، ٩٥
العقول الرياضية، ٧
علاقة ارتدادية، ١٢٠، ١٢١، ١٧
علاقة، ١٢٠، ١٢١، ١٧، ٢٠، ٥٠، ٦٥
عملية حل المسألة، ١٣، ١٦، ٢٥، ٣، ٣١،
٤٥
العنصر الأصغر، ٣٢
عوامل، ١٢٩، ١٣٠، ٢١، ٩٢

ف

فكرة ذكية، ٤٤
فكرة، ١٢٠، ١٢٨، ١٥، ٤٣، ٤٤، ٥٠، ٦٧،
٧٠، ٩١
فهم المسألة، ١٤

ق

قاعدة الأس، ١٧٢
قاعدة التطابق، ١٧٢
قاعدة الجمع، ١٧٢
قاعدة السلسلة، ١٧٢
قاعدة الطرح، ١٧٢
قاعدة المقلوب، ١٧٢
قاعدة، ١٧٢، ٤، ٥٠
قانون التوزيع في الضرب، ٣٥
قانون جيوب التمام، ١٤٩
قانون، ١٤٩، ٣٥، ٩٦
قناة الجذر، ٨٧
قواسم صحيحة موجبة، ٧٩
قواسم، ٧٩
قوى، ١١٦، ٢٣، ٢٤، ٦٢، ٦٣، ٦٩، ٧٠
قيمة حقيقية، ٨٧، ٨٩
قيمة صغرى، ١٠٣
قيمة، ١٠٣، ١١٥، ١٤١، ١٤٦، ١٥٣،
١٧١، ٥٣، ٥٧، ٥٨، ٥٩، ٦٠، ٧٦،
٨٣، ٨٤، ٨٥، ٨٧، ٨٩، ٩٢، ٩٨
قيود المسألة، ٢٢
قيود محددة، ١٠٦
قيود، ١٠٦، ٢٢

ك

كثيرة حدود واحدية، ٥٧
كثيرة حدود، ١١٨، ١٢٩، ١٣، ١٤٦، ١٦٤، ٤٩، ٥٧
كن مثابراً، ١٠، ٦٧

ل

لا تحاول أن تكون حذقاً، ٩، ١٠
لا يوجد شيء جديد لتكتشفه في الرياضيات، ٩
لغة الرياضيات، ٢٩
لمع الحجر، ٤، ٤٣
لوغاريتم، ١٤٥، ١٤٧

م

مبدأ اقتصاد القوة، ٤٤
مبدأ الترتيب الحسن، ٣٢
مبدأ صندوق درشليه، ١٢٤
مبدأ، ١٢٤، ١٢٥، ١٢٧، ٣٢، ٤٤، ٦٣
متباينة، ١٠٤، ١٠٥، ١٣٤، ٩٩، ١٠٠
متتالية، ١١٦، ١١٩، ١٢٠، ٢٤، ٧٣، ٧٤
متطابقة مثلثية، ١٥٥، ١٥٦
متطابقة، ١٥٠، ١٥٣، ١٥٥، ١٥٦، ٤٦، ٩٥
مثال مناقض، ٣٥، ٣٩
مثال، ١١٦، ١٥٢، ١٥٣، ١٥٩، ١٦٠، ١٨، ٢٧، ٣٥، ٣٦، ٣٩، ٤٥، ٨٤
مثلث باسكال، ٢٤، ٢٥، ٨١
مثلث، ٢٤، ٢٥، ٨١
مجموع الجذور، ١٣، ٤٩، ٥١
مجموع كلاسيكي، ١٠٥
مجموع متعددة الحدود، ١١٥
مجموع، ١٠٥، ١٠٦، ١١٥، ١١٦، ١١٧، ١١٨، ١٢٣، ١٢٥، ١٣، ١٤٣، ٢٠، ٢٥، ٢٧، ٢٨، ٣١، ٤٩، ٥١، ٥٤، ٩٣، ٩٤، ٩٥، ٩٩
مدى، ١٠٠، ١٠٥
مربع كامل، ١٦٣، ١٦٤، ٩١، ٩٤
مربع، ١٥٢، ١٦٣، ١٦٤، ٣١، ٩١، ٩٤، ٩٩
مزاوجة، ٥٤
مسافة كلية، ٧٥
مسافة، ٧٥، ٧٦، ٧٧
مسألة، ١٠٥، ١٠٨، ١١٣، ١١٤، ١٢٨، ١٣، ١٤، ١٤٩، ١٥٥، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢٢، ٢٣، ٢٥، ٣٨، ٤، ٤٠، ٤٣، ٤٤، ٤٥، ٤٩، ٦١، ٦٧، ٨، ١١، ٩١، ٩٧
مسائل، ١٠٦، ١١٤، ١٥، ١٦١، ١٨، ٢١، ٣٨، ٦٥، ٧٤، ٨، ٨٦، ٩٨
المشاعر لا مكان لها في الرياضيات، ٩

مطاردة الزاوية، ١٥٠
معادلات خطية آنية، ٥٨
معادلات خطية، ١٣٧، ٥٨
معادلة أسية، ١٣٩
معادلة دائرة، ٢٢
معادلة ديوفنتية، ١٣١، ١٣٢
معادلة لوغاريتمية، ١٧١
معادلة، ١٣١، ١٣٢، ١٣٤، ١٣٥، ١٣٦، ١٣٩، ١٤٥، ١٧١، ١٧٣، ٢٢، ٣٢، ٣٧، ٧٦
معاملات ذات الحدين، ٨١
معاملات، ١١٥، ١١٦، ١١٧، ١١٨، ١٣، ١٦٥، ٢٢، ٧١، ٨١
المعكوس الضربي، ١٣٧، ٣٤، ٣٥
معكوس، ٣٤، ٣٥
المنحى الأفضل للدخول في حل المسألة، ١٠
المنهجية العامة لحل المسألة، ٣، ٥

ن

نص المسألة، ١٠٣، ١٣، ١٤، ١٦، ٢٠، ٧، ٩٨
النظام المدرسي، ٨
النظرية الأساسية في الجبر، ٤٩، ٦١
النظرية الأساسية في الحساب، ٤٠
نظرية الأعداد، ٣١، ٣٥، ٤٥، ٤٦
نظرية العوامل، ١٢٩
نظرية ثالي، ١٥٢
نظرية ذات الحدين، ٨٢
نظرية فيثاغورث، ١٤٩، ٣١، ٣٣
نظرية متعددة الحدود، ١١٥
نظرية، ١٠٤، ١١٥، ١١٨، ١٢٤، ١٢٩، ١٣٢، ١٣٥، ١٤٩، ١٥٢، ١٥٣، ١٧٣، ٢٧، ٢٨، ٣١، ٣٣، ٣٥، ٣٦، ٣٩، ٤٠، ٤٥، ٤٦، ٥٧، ٥٨، ٦١، ٧٦، ٧٧، ٨، ١١، ٨٢، ٨٤، ٨٥، ٩٩

و

الوجود، ١٧١، ٢٥
وحدانية الت، ٤٠
الوحدانية، ٣١